Educaţia Matematică Vol. 4, Nr. 1 (2008), 43 - 45

Asupra unor integrale [1]

Daniela Velicu

Abstract

In this note we present the generalizations for some definite integrals.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50.

În această notă ne propunem să prezentăm câteva generalizări relative asupra unor integrale definite întâlnite în Gazeta Matematică.

1. În G.M. 3/1998 Mihai Bencze a propus problema: *Fiind date* $a > 0,\ a \neq 1$, *să se calculeze* $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \ln(1 + a^x)\ \mathrm{dx}$.

Prezentăm în continuare următoarea generalizare: *Fie* $n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$, *să se calculeze:*

$$I = \int_{-1}^{1} x^{2n-1} \ln(1 + a^x + a^{2x} + \ldots + a^{nx})\ \mathrm{dx}.$$

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x = -t$ avem:

$$I = -\int_{-1}^{1} t^{2n-1} \ln \frac{1 + a^x + a^{2t} + \ldots + a^{nt}}{a^{nt}}\ \mathrm{dt} = -I + \int_{-1}^{1} t^{2n-1} \ln a^{nt}\ \mathrm{dt},$$

de unde

$$2I = n \ln a \int_{-1}^{1} t^{2n}\ \mathrm{dt} = n \ln a \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2n \ln a}{2n+1}.$$

[1] *Received 4 May, 2008*

Accepted for publication (in revised form) 15 June, 2008

De aici, rezultă $I = \dfrac{2n \ln a}{2n+1}$.

Observaţia 1.1. *Pentru $n = 1$ obţinem Problema 23894 din G.M. 3/1998.*

2. În G.M. 3/2006 Traian Tămâian din Carei, Satu Mare, a propus problema : *Fiind date $a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq b,\ x \in \mathbb{R}^+$, să se calculeze*

$$\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{1 + 2006^{2x-a-b}}.$$

Noi propunem următoarea generalizare: *Calculaţi:*

$$I = \int_a^b \frac{dx}{1 + p^{2x-a-b}},\ a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq b,\ p \in \mathbb{R},\ p > 0,\ p \neq 1.$$

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x = a + b - t$ avem:

$$I = \int_a^b \frac{\mathrm{dt}}{1 + p^{a+b-2t}} = \int_a^b \frac{p^{2t-a-b}}{p^{2t-a-b}+1}\ \mathrm{dx},$$

de unde $2I = \displaystyle\int_a^b \mathrm{dt} = b - a$, adică $I = \dfrac{b-a}{2}$.

Observaţia 2.1. *Pentru $p = 2006$ obţinem Problema 25513 din G.M. 3/2006.*

Observaţia 2.2. Avem problema: *Calculaţi*

$$I = \int_a^b \frac{1 + p^x}{1 + p^x + p^{2x-a-b}}\ \mathrm{dx},\ a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq b,\ p \in \mathbb{R}^+,\ p \neq 1.$$

Soluţie. Cu aceeaşi schimbare de variabilă obţinem: $I = \dfrac{b-a}{2}$.

3. Avem şi generalizarea:

$$I = \int_a^b \frac{1}{1 + p^{2nx-na-nb}}\ \mathrm{dx},\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b,\ n \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Soluţie. Punem $x = a + b - t$ şi avem

$$I = \int_a^b \frac{1}{1 + p^{na+nb-2nt}}\ \mathrm{dt} = \int_a^b \frac{p^{2nt-na-nb}}{1 + p^{2nt-na-nb}}\ \mathrm{dt},$$

de unde $2I = \int_a^b \mathrm{dx}$, adică $I = \dfrac{b-a}{2}$.

Observaţia 3.1. *Pentru $n = 1$ obţinem problema de la 2.*

4. Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $g(a + b - x) = g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci avem generalizarea: *Calculaţi*

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{1 + p^{2x-a-b}}\,\mathrm{dx},,\ a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq b,\ p \in \mathbb{R},\ p > 0\ p \neq 1.$$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x = a + b - t$ şi avem:

$$I = \int_a^b \frac{g(t)}{1 + \dfrac{1}{p^{2t-a-b}}}\,\mathrm{dt} = \int_a^b \frac{g(x)p^{2t-a-b}}{p^{2t-a-b} + 1}\,\mathrm{dt},$$

atunci $I + I = 2I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$, de unde $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$.

Observaţia 4.1. *Dacă $g(x) = 1$, obţinem problema de la 2.*

Observaţia 4.2. *Dacă $g(x) = px^2 - p(a + b)x + q,\ p, q \in \mathbb{R},\ p \neq 0,\ a, b, \in \mathbb{R},\ a \neq b$, atunci:*

$$I = \int_a^b \frac{px^2 - p(a + b)x + q}{1 + \alpha^{2x-a-b}}\,\mathrm{dx}, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1.$$

are valoarea

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b [px^2 - p(a + b)x + q]\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[p\frac{x^3}{3}\Big|_a^b - p(a + b)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + qx\Big|_a^b\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p(b^3 - a^3)}{3} - \frac{p(a + b)(b^2 - a^2)}{2} + q(b - a)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p(b^2 + ab + a^2)}{3} - \frac{p(a + b)^2}{2} + q\right].$$

Prof. Daniela Velicu
Grup Şcolar Economic
”J. Lebel” , Tălmaciu, jud. Sibiu