Educaţia Matematică Vol. 4, Nr. 1 (2008), 39 - 42

Generalizări ale unor probleme cu integrale din Gazeta Matematică [1]

Laura Paşcalău

Abstract

In this note we present the generalizations for some problems with the integrals from the Mathematic Gazette (Romania).

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50, 26A42.

1. *Să se arate că dacă $f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, f impară şi g pară atunci:*

$$\int_{-a}^{a} \frac{mg(x)+n}{p+f(x)+\sqrt{p^2+f^2(x)}}\ dx = \frac{na}{p} + \frac{m}{p}\int_0^a g(x)\ dx, \quad m, n, p \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Cu substituţia $x = -t$ şi notând integrala din enunţ cu I, avem:

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{mg(t)+n}{p-f(t)+\sqrt{p^2+f^2(t)}}\ \mathrm{dt}.$$

Atunci succesiv obţinem:

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{mg(x)+n}{p+f(x)+\sqrt{p^2+f^2(x)}}\ \mathrm{dx} + \int_{-a}^{a} \frac{mg(x)+n}{p-f(x)+\sqrt{p^2+f^2(x)}}\ \mathrm{dx} =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{(mg(x)+n)(2p+2\sqrt{p^2+f^2(x)})}{p(2p+2\sqrt{p^2+f^2(x)})}\ \mathrm{dx} = \frac{m}{p}\int_{-a}^{a} g(x)\ \mathrm{dx} + \frac{2an}{p},$$

[1] *Received 15 March, 2008*

Accepted for publication (in revised form) 15 June, 2008

de unde
$$I = \frac{m}{p}\int_0^a g(x)\ \mathrm{dx} + \frac{an}{p}.$$

Observaţia 1.1. *Dacă luăm* $m = 1,\ n = 0,\ p = 1$ *se obţine*
$$\int_{-a}^{a} \frac{g(x)}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}\ dx = \int_0^a g(x)\ dx,$$
care este problema nr. 25933 din G. M. 12/2007, propusă de Vasile Berghea, Avrig, Sibiu.

Observaţia 1.2. *Dacă în această problemă considerăm funcţiile continue* $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$ *impară şi* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *pară, se obţine problema C:3228 din G. M. 10/2007 propusă de Gh. Ghiţă, Buzău.*
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2+\sin^2 x}}\ \mathrm{dx} =$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}}}\ \mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}.$$

2. *Să se calculeze*
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\alpha\sin^{2k} x + \beta\cos^2 x}{\beta + \alpha(\sin^{2k} x + \cos^{2k} x)}\ dx,\ k \in \mathbb{N}, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Cu substituţia $t = \dfrac{3\pi}{2} - x$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$ şi notând integrala din enunţ cu I, avem:
$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\alpha\sin^{2k} t + \beta\cos^2 t}{\beta + \alpha(\sin^{2k} t + \cos^{2k} t)}\ \mathrm{dt}$$

Atunci obţinem
$$2I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\alpha(\sin^{2k} x + \cos^{2k} x) + \beta(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\beta + \alpha(\sin^{2k} x + \cos^{2k} x)}\ \mathrm{dx} = \frac{3\pi}{2},$$

de unde, $I = \dfrac{3\pi}{4}$.

Observaţia 2.1. *Dacă $\alpha = \beta = 1$ şi $k = 4$ se obţine Problema 25792 din G. M. 5/2007 propusă de Ştefan Valea, Mediaş:*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^8 x + \cos^8 x}{1 + (\sin^8 x + \cos^8 x)}\,\mathrm{dx} = \frac{3\pi}{4}.$$

3. *Să se calculeze*

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(\alpha+\beta)x^{2n} + ax^n + (\alpha-\beta)}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}\,dx,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^*.$$

Soluţie. Notând integrala cerută cu I şi făcând substituţia $x = \dfrac{1}{t}$ obţinem

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(\alpha+\beta) + at^n + (\alpha-\beta)t^{2n}}{(1+t^2)(t^{2n}+t^n+1)}\,\mathrm{dt}.$$

Acum putem scrie:

$$2I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{2\alpha x^{2n} + 2\alpha x^{2n} + 2\alpha}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}\,\mathrm{dx} = 2\alpha \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$2\alpha\left(\mathrm{arctg} a - \mathrm{arctg}\frac{1}{a}\right).$$

Observaţia 3.1. *Dacă se alege $\alpha = 4,\ \beta = 1,\ a = 2$ se obţine Problema 25815 din G. M. 6/2007 propusă de Alfred Eckstein şi Viorel Tudoran, Arad:*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5x^{2n} + 4x^n + 3}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}\,\mathrm{dx} = 8\left(\mathrm{arctg}2 - \mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right).$$

4. *Calculaţi*

$$\int \frac{ma^{nx} + ka^x}{(p+a^x)^{n+1}}\,dx,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ m,k,p \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Cu substituţia $p + a^x = t$ integrala devine:

$$\frac{1}{\ln a}\int \left[m\left(1-\frac{p}{t}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{t^2} + \frac{k}{t^{n+1}}\right]\,\mathrm{dt} = \frac{m}{pn\ln a}\left(1-\frac{p}{t}\right)^n - \frac{k}{n\ln a}\cdot\frac{1}{t^n} + C =$$

$$= \frac{m}{pn\ln a}\left(\frac{a^x}{p+a^x}\right)^n - \frac{k}{n\ln a}\cdot\frac{1}{(p+a^x)^n} + C = \frac{ma^{nx}-kp}{pn\ln a(p+a^x)^n} + C.$$

Observaţia 4.1. *Pentru* $a=2,\ m=1,\ p=1,\ k=-1$, *se obţine Problema 25876 din G. M. 9/2007, propusă de Cantemir Iliescu, Curtea de Argeş:*

$$\int \frac{2^{nx}-2^x}{(1+2^x)^{n+1}}\,dx = \frac{2^{nx}+1}{n\ln 2(1+2^n)^n} + C,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

5. *Să se calcueze*

$$\int \frac{x(2mx+n)(mx+n)}{(mx^2+nx)^4+a^2}\,dx,\ m,n\in\mathbb{R}, a\in(0,\infty).$$

Soluţie. Integrala se scrie $I = \int \frac{x(2mx+n)(mx+n)}{(mx^2+nx)^4+a^2}$ dx, de unde, prin substituţia $t = mx^2+nx$, avem $I = \int \frac{t}{t^4+a^2}$ dt.

Notând $u = t^2$, obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+a^2}\,\mathrm{du} = \frac{1}{2a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a}\mathrm{arctg}\frac{(mx^2+nx)^2}{a} + C.$$

Observaţia 5.1. *Luând* $m=1,\ n=-2,\ a=2$ *se obţine Problema 25813 din G. M. 6/2007, propusă de Marin Chirciu, Piteşti:*

$$\int \frac{x(x-1)(x-2)}{(x^2-2x)^4+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\frac{(x^2-2x)^2}{2} + C$$

Colegiul Tehnic "Independenţa"
Sibiu