Educaţia Matematică Vol. 4, Nr. 1 (2008), 57 - 63

Asupra unui şir de numere reale [1]

Doriana Dorca

Abstract

In this paper we give three generalizations of a problem proposed in "Revista de Matematică Timişoara".

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50, 40A05

În Revista de Matematică Timişoara, nr.1/2006, este prezentată următoarea problemă propusă de Cristinel Mortici: *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*

$$x_n = \frac{1}{n+\dfrac{n+1}{n}} + \frac{1}{n+\dfrac{n+2}{n}} + \ldots + \frac{1}{n+\dfrac{n+n}{n}}.$$

Să se demonstreze că: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x_n) = \dfrac{3}{2}$.

În această lucrare vom prezenta câteva generalizări ale acestei probleme.

1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *o progresie aritmetică cu* $a_1 > 0$ *şi raţia* $r > 0$. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de termen general:*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\dfrac{n+a_k}{n}}.$$

[1] *Received 2 March, 2008*

Accepted for publication (in revised form) 15 April, 2008

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$*; b) Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x_n)$*.*

Soluţie. a) Avem $\dfrac{1}{n+\dfrac{n+a_n}{n}} \leq \dfrac{1}{n+\dfrac{n+a_k}{n}} \leq \dfrac{1}{n+\dfrac{n+a_1}{n}}$. Însumăm dubla inegalitate după $k=1,\ldots,n$ şi obţinem

$$\frac{n^2}{n^2+n+a_n} \leq x_n \leq \frac{n^2}{n^2+n+a_1}.$$

Trecem la limită şi cum avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+a_1+(n-1)r} = 1,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n+a_1} = 1$, be baza criteriului "cleştelui" deducem că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

b) Avem

$$n(1-x_n) = n\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n+\dfrac{n+a_k}{n}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{n^2}{n^2+n+a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+a_k}{n^2+n+a_k}\right).$$

Termenul general al sumei îl încadrăm astfel:

$$\frac{n+a_k}{n^2+n+a_n} \leq \frac{n+a_k}{n^2+n+a_k} \leq \frac{n+a_k}{n^2+n+a_1}.$$

Însumând, obţinem

$$\frac{n^2+\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}}{n^2+n+a_n} \leq n(1-x_n) \leq \frac{n^2+\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}}{n^2+n+a_1}$$

sau

$$\frac{2n^2+n(2a_1+nr-r)}{2n^2+2n+2a_n} \leq n(1-x_n) \leq \frac{2n^2+n(2a_1+nr-r)}{2n^2+2n+2a_n}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+(2a_1+nr-r)}{2n^2+2n+2a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(2+r)+n(2a_1-r)}{2n^2+2n+2(a_1+nr-r} = \dfrac{2+r}{2} =$
$= 1+\dfrac{r}{2}$,

iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n^2r+n(2a_1-r)}{2n^2+2n+2a_1} = 1+\dfrac{r}{2}$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} n(1-x_n) = 1+\frac{r}{2}.$$

Observaţia 1.1. Pentru $a_1 = r = 1$ se obţine problema O.XI. 96 propusă de Cristinel Mortici, R.M.T. 1/2006.

2. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general:*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n + \dfrac{a_n+a_k}{a_n}}.$$

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{r}-x_n\right)$.

Soluţie. a) Avem $\dfrac{1}{a_n+\dfrac{a_n+a_n}{a_n}} \leq \dfrac{1}{a_n+\dfrac{a_n+a_k}{a_n}} \leq \dfrac{1}{a_n+\dfrac{a_n+a_1}{a_n}}$.

Însumăm dubla inegalitate după $k = 1, 2, \ldots, n$ şi obţinem:

$$\frac{na_n}{a_n^2+2a_n} \leq x_n \leq \frac{na_n}{a_n^2+a_n+a_1}.$$

Trecem la limită şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{a_n^2+2a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_1+(n-1)r+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nr+a_1-r+2} = \frac{1}{r},$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{a_n^2+a_n+a_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1+nr-r)}{a_n(a_n+1)+1} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2r+n(a_1-r)}{(a_1+nr-r)(a_1+nr-r+1)+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2r+n(a_1-r)}{n^2r^2+n(2a_1r-2r^2+1)+(a_1-r)(a_1-r+1)+1}=\frac{1}{r}.$$

iar be baza criteriului "cleştelui" deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{r}$.

b) Avem:

$$n\left(\frac{1}{r}-x_n\right)=n\left(\frac{1}{r}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n+\dfrac{a_n+a_k}{a_n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{n}{a_n+\dfrac{a_n+a_k}{a_n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n^2+a_n+a_k-rna_n}{a_n^2+a_n+a_k}\right)=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n(a_n+1-rn)+a_k}{a_n^2+a_n+a_k}\right)=$$
$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n(a_1-r+1)+a_k}{a_n^2+a_n+a_k}\right).$$

Pentru $k=\overline{1,n}$ este îndeplinită dubla inegalitate

$$\frac{a_n(a_1-r+1)+a_k}{a_n^2+a_n+a_n}\le\frac{a_n(a_1-r+1)+a_k}{a_n^2+a_n+a_k}\le\frac{a_n(a_1-r+1)+a_k}{a_n^2+a_n+a_1}.$$

Însumăm şi obţinem:

$$\frac{1}{r}\frac{n(a_1-r+1)a_n+\dfrac{a_1+a_n}{2}n}{a_n^2+a_n+a_n}\le n\left(\frac{1}{r}-x_n\right)\le\frac{1}{r}\frac{n(a_1-r+1)a_n+\dfrac{a_1+a_n}{2}n}{a_n^2+a_n+a_1}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\frac{2n(a_1-r+1)a_n+a_1n+a_nn}{2a_n^2+4a_n}=$$
$$=\frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2r(2a_1-2r+3)+(a_1-r)(2a_1-2r+3)n+a_1n}{2(a_1+nr-r)(a_1+nr-r+2)}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{r(2a_1-2r+3)}{2r^2}=\frac{a_1-r+\dfrac{3}{2}}{r^2},$$

iar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_1-r+1)a_n+\dfrac{a_1+a_n}{2}n}{a_n^2+a_n+a_1}=$$
$$=\frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2r(2a_1-2r+3)+n(a_1-r)(2a_1-2r+3)+a_1n}{2(a_1+nr-r)(a_1+nr-r+1)+2a_1}=$$

$$\frac{1}{r}\frac{r(2a_1-2r+3)}{2r^2}=\frac{a_1-r+\dfrac{3}{2}}{r^2},$$

de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{r}-x_n\right)=\dfrac{a_1-r+\dfrac{3}{2}}{r^2}$.

Observaţia 2.1. Pentru $a_1=r=1$ se obţine problema O.XI.96 propusă de Cristinel Mortici, R.M.T. 1/2006.

3. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1>0$ şi raţia $r>0$. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general:*

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n+\dfrac{a_{n+k}}{a_n}}.$$

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\ to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{r}-x_n\right)$.

Soluţie. a) Avem

$$\frac{1}{a_n+\dfrac{a_{2n}}{a_n}}\leq\frac{1}{a_n+\dfrac{a_{n+k}}{a_n}}\leq\frac{1}{a_n+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}},\ k=\overline{1,n}.$$

Însumăm dubla inegalitate după $k=1,2,\dots,n$ şi obţinem:

$$\frac{na_n}{a_n^2+a_{2n}}\leq x_n\leq\frac{na_n}{a_n^2+a_{n+1}}.$$

Sau

$$\frac{n(a_1+(n-1)r)}{(a_1+(n-1)r)^2+a_1+(2n-1)r}\leq x_n\leq\frac{n(a_1+(n-1)r)}{(a_1+(n-1)r)^2+a_1+nr}.$$

Trecem la limită şi avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2r+n(a_1-r)}{n^2r^2+n(2a_1r-2r^2+2r)+(a_1-r)(a_1-r+1)}=\frac{1}{r}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2r+n(a_1-r)}{n^2r^2+n(2a_1r-2r^2+2r)+a_1^2+a_1}=\frac{1}{r},$$

de unde, pe baza criteriului ”cleştelui” deducem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{r}$.

b) Avem

$$n\left(\frac{1}{r}-x_n\right) = n\left(\frac{1}{r}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n+\dfrac{a_{n+k}}{a_n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{na_n}{a_n^2+a_{n+k}}\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n^2+a_{n+k}-rna_n}{a_n^2+a_{n+k}}\right) = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n^2+a_{n+k}-nra_n}{a_n^2+a_{n+k}}\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n(a_n-nr)+a_{n+k}}{a_n^2+a_{n+k}}\right) = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_n(a_1-r)+a_{n+k}}{a_n^2+a_{n+k}}\right).$$

Pentru $k=\overline{1,n}$ este îndeplinită dubla inegalitate

$$\frac{a_n(a_1-r)+a_{n+k}}{a_n^2+2a_n} \le \frac{a_n(a_1-r)+a_{n+k}}{a_n^2+a_{n+k}} \le \frac{a_n(a_1-r)+a_{n+k}}{a_n^2+a_{n+1}}.$$

Însumând obţinem:

$$\frac{1}{r}\frac{n(a_1-r)a_n+\dfrac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}n}{a_n^2+2a_n} \le n\left(\frac{1}{r}-x_n\right) \le \frac{1}{r}\frac{n(a_1-r)a_n+\dfrac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}n}{a_n^2+a_{n+1}}.$$

Dar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\frac{n(a_1-r)(a_1+nr-r)+\dfrac{a_1+nr+a_1+(2n-1)r}{2}n}{(a_1+nr-r)^2+a_1+(2n-1)r} =$

$$= \frac{1}{2r}\lim_{n\to\infty}\frac{n^r(a_1-r)+(a_1-r)(a_1-r)2n+2a_1n+3n^2r-rn}{n^2r^2+n(2a_1r-2r^2+2r)+(a_1-r)(a_1-r+1)} =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{r(2a_1-2r+3)}{2r^2} = \frac{a_1-r+\dfrac{3}{2}}{r^2}$$

şi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{na_n(a_1-r)+\dfrac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}n}{a_n^2+a_{n+1}} =$

$$\frac{1}{r}\frac{n^2r(a_1-r)+n((a_1-r)^2+a_1)+\dfrac{3}{2}n^2r-\dfrac{nr}{2}}{n^2r^2+nr(2a_1-2r+1)+r^2} = \frac{1}{r}\frac{r(2a_1-2r+3)}{2r^2} =$$
$$\frac{a_1-r+\dfrac{3}{2}}{r^2}.$$

Atunci avem $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{r}-x_n\right)=\frac{a_1-r+\frac{3}{2}}{r^2}$.

Observaţia 3.1. Pentru $a_1 = r = 1$ se obţine problema O.XI.96 propusă de Cristinel Mortici, R.M.T. 1/2006.

Liceul de Artă
Str. Al. Odobescu, nr. 2, Sibiu
E-mail: doriana_dorca@yahoo.com