Educaţia Matematică Vol. 4, Nr. 1 (2008), 33 - 38

Teoreme de Analiză Matematică - II (teorema Borel - Lebesgue) [1]

Silviu Crăciunaş

Abstract

In this article we propose a demonstration of Borel - Lebesgue theorem based on axiomatic construction of real numbers, which allows to place this before series convergence.

2000 Mathematical Subject Classification: 03E99, 11B99

Vom reaminti mai întâi câteva noţiuni şi rezultate prezentate în [2].

Definiţia 1. *Numim* **sistem de numere reale** *sau* **mulţime a numerelor reale** *orice corp comutativ* $\mathbb{K}$ *faţă de două operaţii notate* $+$ *şi* $\cdot$ *având proprietăţile:*

I. Corpul $\mathbb{K}$ *este total ordonat printr-o relaţie de ordine notată* $\leq$ *pentru care*

a. pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$ *cu* $x \leq y$ *avem* $x + z \leq y + z$ *oricare ar fi* $z \in \mathbb{K}$

b. pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$ *cu* $x \geq 0$ *şi* $y \geq 0$ *avem* $x \cdot y \geq 0$

II. Corpul $\mathbb{K}$ *este complet ordonat, adică orice submulţime* A *a lui* $\mathbb{K}$ *care este majorată admite o margine superioară în* $\mathbb{K}$.

[1] *Received 10 May, 2008*

Accepted for publication (in revised form) 20 May, 2008

Vom utiliza în continuare notaţia uzuală $\mathbb{R}$ pentru un astfel de corp.

Teorema 1. *(principiul Cantor-Dedekind) Pentru orice familie numărabilă de intervale inchise* $I_n = [a_n, b_n]$ *cu* $I_{n+1} \subset I_n$*, unde* a_n*,* b_n *sunt numere reale, avem că*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Teorema 2. *Dacă* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *sunt două familii de numere raţionale care au proprietăţile*

1. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_m \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$

2. *pentru orice* $\alpha > 0$ *există* $n \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $b_n - a_n < \alpha$

atunci există un număr real x_0 *şi numai unul astfel încât* $a_n \leq x_0 \leq b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*.*

Teorema 3. *(Weierstrass-Bolzano) O submulţime mărginită şi infinită de numere reale are cel puţin un punct de acumulare*

Definiţia 2. *Fie* (E, τ) *un spaţiu topologic. Numim* **acoperire cu deschise** *a unei submulţimi* A *a spaţiului orice familie de mulţimi deschise* $\{D_i, i \in \mathfrak{I}\}$ *cu proprietatea că*

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} D_i$$

Într-un spaţiu topologic oarecare avem următoarea definiţie a mulţimilor compacte.

Definiţia 3. *Fie* (E, τ) *un spaţiu topologic. Spunem că o submulţime* K *a spaţiului topologic este* **compactă** *dacă din orice acoperire cu deschise a sa putem extrage o subacoperire formată dintr-un număr finit de deschise.*

În $\mathbb{R}$ avem următoarea definiţie.

Definiţia 4. *Numim* **mulţime compactă** *în* $\mathbb{R}$ *orice submulţime închisă şi mărginită.*

Este natural să exprimăm o legătură între cele două definiţii prin care să arătăm că este vorba de aceeaşi noţiune. Echivalenţa celor două definiţii este dată de teorema Borel-Lebesgue.

Teorema 4. *O submulţime $A \subset \mathbb{R}$ este compactă dacă şi numai dacă din orice acoperire cu intervale deschise a sa putem extrage o subacoperire finită.*

Demonstraţie. Dacă mulţimea A este finită adică

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

şi

$$\{D_i \ / \ i \in \mathfrak{I}\}$$

o familie de intervale deschise cu proprietatea că

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} D_i$$

atunci pentru fiecare x_i există un D_{j_i} cu $x_i \in D_{j_i}$ deci

$$A = \bigcup_{i=1}^{i=n} \{x_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} D_{j_i}.$$

Fie A o submulţime compactă în $\mathbb{R}$ care are o infinitate de elemente. Mulţimea A este mărginită şi închisă deci există un interval închis $I = [a, b]$ aşa încât $A \subset [a, b]$. Fie

$$\{D_i \ / \ i \in \mathfrak{I}\}$$

o familie de intervale deschise cu proprietatea că

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} D_i.$$

Considerăm un element arbitrar $x, x \in A$ aşadar $x \in [a, b]$. Luând pentru un $\epsilon > 0$ intervalele deschise $D' = (a - \epsilon, x)$ şi $D'' = (x, b + \epsilon)$ obţinem o acoperire cu deschise a intervalului $[a, b]$, respectiv

$$[a, b] \subset D' \bigcup (\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} D_i) \bigcup D''$$

Dacă putem determina o familie finită de intervale care să constituie o acoperire a lui $[a, b]$ atunci eliminând eventual intervalele D' şi D'' va rezulta acoperirea finită pentru mulţimea A corespunzătoare familiei iniţiale de intervale deschise. Presupunem prin absurd că nu există o subfamilie finită de intervale deschise care să constituie o acoperire a intervalului $[a, b]$. Luând mulţimile

$$A' = [a, \frac{a+b}{2}] \text{ şi } A'' = [\frac{a+b}{2}, b]$$

cel puţin una din aceste mulţimi nu poate fi acoperită de o familie finită de intervale deschise. Să notăm prin $I_1 = [a_1, b_1]$ unul din intervalele $[a, \frac{a+b}{2}]$ sau $[\frac{a+b}{2}, b]$ în funcţie de opţiunea selectată anterior. Continuând raţionamentul anterior pentru I_1, obţinem o familie numărabilă de intervale $I_n = [a_n, b_n]$ cu

a. $I_{n+1} \subset I_n$

b. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

c. I_n nu poate fi acoperit cu o subfamilie finită de intervale deschise din familia dată.

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Conform principiului lui Cantor-Dedekind şi unei părţi din demonstraţia teoremei Weierstrass-Bolzano există un număr real x_0 cu

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$$

Evident avem $a_n < x_0 < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Din

$$x_0 \in [a, b] \subset D' \bigcup D'' \bigcup (\bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i)$$

există $D_{i_0} = (\alpha, \beta)$ cu $x_0 \in D_{i_0}$ (D_{i_0} poate fi un interval D_i sau unul dintre intervalele D' sau D''. Există un $n \in \mathbb{N}$ cu $\alpha \leq a_n$ (în caz contrar am avea că $a_n < \alpha < x_0 < b_n$ pentru orice n şi atunci intersecţia familiei de intervale nu s-ar mai reduce la un singur punct x_0). Similar, există $m \in \mathbb{N}$ cu $b_m \leq \beta$. Luând $k = \max\{n, m\}$, obţinem $I_k \subset D_{i_0}$, absurd deoarece

I_k nu poate fi acoperit cu o subfamilie finită de intervale. Aşadar există o familie finită de intervale din familia dată care acoperă intervalul $[a,b]$, familie notată prin $\{D_{k_1}, D_{k_2}, D_{k_3}, \ldots, D_{k_p}\}$. Pentru numărul real $x \in A$ considerat la construcţia intervalelor D' şi D'', există un interval D_o cu $x \in D_0$. Eliminând eventual pe D' şi pe D'' din familia finită determinată şi adăugând intervalul D_0 se obţine familia finită de intervale ce acoperă mulţimea A.

Reciproc, presupunem condiţia din teoremă îndeplinită, adică din orice acoperire cu intervale deschise a mulţimii A putem extrage o subacoperire finită. Evident, putem spune că mulţimea A este mărginită. Vom demonstra că A este şi închisă, adică îşi conţine punctele de acumulare. Presupunem prin absurd că există un punct de acumulare x_0 al mulţimii A aşa încât x_0 să nu aparţină lui A. Fie $y \in A$ arbitrar. Avem că $x \neq y$ deci există ϵ_x şi η_y pozitivi aşa încât $V_{x,\epsilon} = (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$ şi $U_{y,\eta} = (y - \eta_y, y + \eta_y)$ sunt vecinătăţi disjuncte. Familia de intervale deschise

$$\{U_{y,\eta} = (y - \eta_y, y + \eta_y), y \in A\}$$

constituie o acoperire cu deschise a mulţimii A deci există o subacoperire finită de forma $\{U_{y_k}, y_k \in A, k = 1, 2, \ldots, p\}$. Luând

$$V = \bigcap_{k=1}^{p} V_{x,\epsilon_k}, U = \bigcup_{k=1}^{p} U_{y_k,\eta_k},$$

se obţin două mulţimi disjuncte cu V, vecinătate a lui x_0, şi U cu $A \subset U$ deci x_0 nu ar fi punct de acumulare pentru A, absurd.

Folosind această teoremă se poate da o altă demonstraţie teoremei lui Weierstrass-Bolzano care nu face apel la convergenţa şirurilor.

Teorema 5. *Orice submulţime mărginită şi infinită de numere reale are cel puţin un punct de acumulare*

Demonstraţie. Fie A o mulţime mărginită şi închisă de numere reale. Există un interval $[a,b]$ cu $A \subset [a,b]$. Vom demonstra că cel puţin un element din $[a,b]$ este punct de acumulare pentru mulţimea A. Presupunem că orice $x \in [a,b]$ nu este punct de acumulare pentru A, deci există un interval deschis V_x centrat în x aşa încât $V_x \bigcap A$ să aibă un număr finit de puncte. Familia $\{V_x, x \in A\}$ constituie o acoperire a intervalului $[a,b]$, care este compact, deci putem determina o subacoperire finită $\{V_{x_i}, i = 1,2,\ldots,p\}$. Avem că

$$A \subset [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$$

deci ar rezulta că A este finită, absurd.

Bibliografie

[1] Colojoară I., *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1983)

[2] Crăciunaş S., Dicu P., Boncuţ Mioara, Teoreme de Analiză Matematică I (Teorema Weierstrass-Bolzano), Educaţia Matematică, Sibiu 2007, 7 pg.

[3] Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., *Analiză Matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1966).

[4] Iacob F., *Note de curs*, Universitatea ”Alexandru Ioan Cuza” Iaşi (http://thor.info.uaic.ro/ fliacob/An1/2004-2005/Semestrul1/Multimi.pdf)

[5] Roşculeţ M., *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1979).

Lucian Blaga University,
Department of Mathematics,
Sibiu- Romania
E-mail: silviu.craciunas@ulbsibiu.ro