Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 61-74

Exemple remarcabile de grupoizi [1]

Alina Totoi

Abstract

In this article we present some basic facts about groupoids and some interesting examples of gruopoids which are important for someone who wants to understand and study the groupoids.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50

Noţiunea de grupoid este o generalizare a noţiunii de grup şi ea a fost introdusă de G.Mackey [1] pentru a cerceta analogiile, aparent îndepărtate, dintre teoria grupului şi teoria ergodică (parte a teoriei măsurii).

Grupoizii cu măsură introduşi de G. Mackey posedă o "măsură" Haar (numită de obicei sistem Haar) asemănătoare cu măsura Haar introdusă pe grupurile local compacte. Multe proprietăţi ale grupurilor înzestrate cu măsură Haar au fost generalizate datorită grupoizilor.

În prima parte a acestei lucrări vom expune definiţia grupoidului şi câteva dintre proprietăţile algebrice fundamentale ale sale , iar în partea a doua vom prezenta câteva exemple de grupoizi care duc la o mai bună înţelegere a definiţiei grupoidului.

[1] *Received 10 March 2006*

Accepted for publication (in revised form) 15 June 2007

1 Noţiunea de grupoid. Proprietăţi

Definiţia 1.1. *Numim grupoid o mulţime G nevidă, înzestrată cu o aplicaţie produs $(x,y) \to xy[: G^{(2)} \to G]$, unde $G^{(2)}$ este o submulţime a lui $G \times G$ numită mulţimea perechilor compozabile, şi cu o aplicaţie inversă $x \to x^{-1}$ $[: G \to G]$ astfel încât sunt îndeplinite următoarele relaţii:*

(i) $(x^{-1})^{-1} = x$ oricare ar fi $x \in G$;

(ii) Dacă $(x,y),(y,z) \in G^{(2)}$ atunci $(xy,z) \in G^{(2)}$ şi $(x,yz) \in G^{(2)}$ iar $(xy)z = x(yz)$;

(iii) (1) $(x^{-1},x) \in G^{(2)}$ oricare ar fi $x \in G$. Dacă, în plus, $(x,y) \in G^{(2)}$ atunci (2) $x^{-1}(xy) = y$.

(iv) (1) $(x,x^{-1}) \in G^{(2)}$ oricare ar fi $x \in G$. Dacă, în plus, $(z,x) \in G^{(2)}$ atunci (2) $(zx)x^{-1} = z$.

Aplicaţia $r : G \to G$ definită prin $r(x) = xx^{-1}$ se numeşte *aplicaţia rang* iar aplicaţia $d : G \to G$ definită prin $d(x) = x^{-1}x$ se numeşte *aplicaţia domeniu.*

În continuare prezentăm câteva din proprietăţile de bază ale grupoizilor.

Propoziţia 1.1. *Dacă G este grupoid şi $x,y,z \in G$ cu $(x,y) \in G^{(2)}$ şi $(x,z) \in G^{(2)}$, atunci $xy = xz$ dacă şi numai dacă $y = z$ (adică avem simplificare la stânga, respectiv la dreapta, într-un grupoid)*

Demonstraţie. Necesitatea. Din definiţia grupului există $x^{-1} \in G$ cu proprietăţile (i)$\to$(iv). Din $(x,y) \in G^{(2)}$, $(x,z) \in G^{(2)}$, (iii) (Definiţia 1.1) şi $xy = xz$ avem $x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$, adică $y = z$.

Suficienţa. Evident, din definiţia aplicaţiei produs.

Propoziţia 1.2. *Dacă G este un grupoid şi $x,z \in G$, atunci $(x,y) \in G^{(2)}$ dacă şi numai dacă $d(x) = r(y)$.*

Demonstraţie. Necesitatea. Din $(x,y) \in G^{(2)}$ şi $(y,y^{-1}) \in G^{(2)}$ ((iv) din Definiţia 1.1), folosind (ii) din Definiţia 1.1 obţinem: $(xy)y^{-1} = x(yy^{-1})$ echivalentă cu

(3) $$(xy)y^{-1} = xr(y);$$

Se verifică uşor, folosind (ii) şi (iii)(1) din Definiţia 1.1 că $(x^{-1}, xr(y)) \in G^{(2)}$ şi $(x^{-1}, (xy)y^{-1}) \in G^{(2)}$.
Din (3) obţinem

$$x^{-1}[(xy)y^{-1}] = x^{-1}[xr(y)] = r(y). \tag{4}$$

Dar

$$x^{-1}[(xy)y^{-1}] = [x^{-1}(xy)]y^{-1} = [(x^{-1}x)y]y^{-1} = [d(x)y]y^{-1} = d(x). \tag{5}$$

Din (4) şi (5) ne rezultă $d(x) = r(y)$ c.c.t.d.

Suficienţa. Fie $x, y \in G$ cu $d(x) = r(y)$. Vrem să arătăm că $(x, y) \in G^{(2)}$.
Egalitatea $d(x) = r(y)$ este echivalentă cu

$$x^{-1}x = yy^{-1}. \tag{6}$$

Ştim $(x, x^{-1}) \in G^{(2)}, (x^{-1}, x) \in G^{(2)}$ şi folosind (ii) obţinem

$$(xx^{-1})x = x(x^{-1}x). \tag{7}$$

Din (i) şi (iv) obţinem

$$(xx^{-1})x = (xx^{-1})(x^{-1})^{-1} = x. \tag{8}$$

Folosind (6) avem

$$x(x^{-1}x) = x(yy^{-1}). \tag{9}$$

Din (7), (8) şi (9) obţinem $x = x(yy^{-1})$, deci

$$(x, yy^{-1}) \in G^{(2)}. \tag{10}$$

Se observă imediat că

$$(yy^{-1}, y) \in G^{(2)}. \tag{11}$$

Din (10), (11) şi (ii) avem $(x, y) \in G^{(2)}$ c.c.t.d.

Propoziţia 1.3. *Fie G grupoid. Atunci au loc egalităţile:*

(a) $xd(x) = x$ şi $r(x)x = x$ oricare ar fi $x \in G$;

(b) $r(x^{-1}) = d(x)$ şi $d(x^{-1}) = r(x)$ oricare ar fi $x \in G$;

(c) $r(xy) = r(x)$ şi $d(xy) = d(y)$ oricare ar fi $(x, y) \in G^{(2)}$;

(d) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ oricare ar fi $(x, y) \in G^{(2)}$.

Demonstraţie. a) Fie $x \in G$. $xd(x) = x(x^{-1}x)$. Ştim $(x, x^{-1}) \in G^{(2)}$ şi $(x^{-1}, x) \in G^{(2)}$ deci folosind (ii) obţinem că $(x, x^{-1}x) \in G^{(2)}$, $(xx^{-1}, x) \in G^{(2)}$ şi, în plus, $x(x^{-1}x) = (xx^{-1})x$.
Deci, $xd(x) = (xx^{-1})x = (xx^{-1})(x^{-1})^{-1} = x$. Am obţinut $xd(x) = x$ c.c.t.d.

Analog, $r(x)x = x$.

b) $r(x^{-1}) = x^{-1}(x^{-1})^{-1} = x^{-1}x = d(x)$(am folosit (i)) şi
$d(x^{-1}) = r((x^{-1})^{-1}) = r(x)$(din egalitatea precedentă şi (i)).

c) Fie $(x, y) \in G^{(2)}$. Vrem să arătăm că $r(x, y) = r(x)$.
Ştim $(x^{-1}, x) \in G^{(2)}$, $(x, y) \in G^{(2)}$ şi va rezulta folosind (ii) că $(x^{-1}, xy) \in G^{(2)}$.
Avem $(x, x^{-1}) \in G^{(2)}$, $(x^{-1}, xy) \in G^{(2)}$ şi folosind (ii) obţinem relaţia

$$(xx^{-1})(xy) = x[x^{-1}(xy)],$$

care este echivalentă cu

$$r(x)(xy) = xy. \tag{12}$$

Dar din punctul (a) avem

$$r(xy)(xy) = xy. \tag{13}$$

Din (12) şi (13) obţinem $r(x)(xy) = r(xy)(xy)$ şi folosind simplificarea la dreapta ajungem la $r(x) = r(xy)$ c.c.t.d.

Similar pentru $d(xy) = d(y)$.

d) Fie $(x, y) \in G^{(2)}$. Vrem să arătăm că $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

Mai întâi verificăm că $(y^{-1}, x^{-1}) \in G^{(2)}$ este echivalentă cu
$d(y^{-1}) = r(x^{-1})$.
Dar din punctul (b) avem

$$d(y^{-1}) = r(y) \text{ şi } r(x^{-1}) = d(x) \tag{14}$$

Cum $(x,y) \in G^{(2)}$ avem

$$d(x) = r(y). \tag{15}$$

Din (14) şi (15) obţinem egalităţile

$$d(y^{-1}) = r(y) = d(x) = r(x^{-1}) \text{ ,deci } (y^{-1}, x^{-1}) \in G^{(2)}.$$

Din punctul (c) avem $r(xy) = r(x)$ care este echivalentă cu $(xy)(xy)^{-1} = xx^{-1}$, adică $x[y(xy)^{-1}] = xx^{-1}$ şi folosind simplificarea la stânga obţinem

$$y(xy)^{-1} = x^{-1} \text{ de unde } (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Propoziţia 1.4. *Dacă G este grupoid, atunci $d(G) = r(G)$.*
De obicei imaginea comună a aplicaţiilor r şi d se notează cu G° şi se numeşte spaţiul unitate al lui G.

Demonstraţie. $d(G) = \{d(x) | x \in G\}$ şi $r(G) = \{r(x) | x \in G\}$.
Arătăm că $d(G) \subseteq r(G)$.

Fie $d(x) \in d(G)$ fixat. Ştim din Propoziţia 1.3 (punctul (b)) că $d(x) = r(x^{-1}) \in r(G)$. Deci $d(G) \subseteq r(G)$.

Analog, $r(G) \subseteq d(G)$ şi se va obţine egalitatea $d(G) = r(G)$

Propoziţia 1.5. *Fie G grupoid şi $x \in G$. Atunci $r(x) = x$, respectiv $d(x) = x$ dacă şi numai dacă $x \in G^\circ$.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $x \in G$. Presupunem că $r(x) = x$ şi vom arăta că $x \in G^\circ$. $x = r(x) \in r(G) = G^\circ$.

Suficienţa. Presupunem că $x \in G^\circ$ şi arătăm că $r(x) = x$. Din $x \in G^\circ = r(G)$ va rezulta că există cel puţin un $y \in G$ astfel încât

$$x = r(y) = yy^{-1}, \tag{16}$$

de unde obţinem $r(x) = xx^{-1} = (yy^{-1})(yy^{-1})^{-1} = (yy^{-1})(yy^{-1}) =$
$= [(yy^{-1})y]y^{-1} = yy^{-1} = x$.

Am obţinut $r(x) = x$ c.c.t.d.

Propoziţia 1.6. *Fie G grupoid. Atunci G este un grup dacă şi numai dacă $G^2 = G \times G$.*

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că G este un grup şi rezultă că orice două elemente din G sunt compozabile, adică $G \times G \subseteq G^2$. Dar $G^2 \subseteq G \times G$ (din definiţia grupoidului), deci $G^2 = G \times G$.

Suficienţa. Presupunem că G este grupoid cu $G^2 = G \times G$, adică oricare ar fi $x, y \in G$ există $xy \in G$. Deci aplicaţia $(x, y) \to xy[: G \times G \to G]$ este lege de compoziţie pe G. Se observă imediat (din (ii), Definiţia 1.1) că legea este asociativă.

Din definiţia grupoidului ştim că G este nevidă şi deci putem alege un element $x_0 \in G$.

Arătăm că $r(x_0)$ este unitate la stânga pentru elementele lui G iar $d(x_0)$ este unitate la dreapta, adică $r(x_0)x = x$ şi $xd(x_0) = x$ oricare ar fi $x \in G$.

Avem

$$r(x_0)x = (x_0 x_0^{-1})x = x_0(x_0^{-1}x) = (x_0^{-1})^{-1}(x_0^{-1}x) = x, \tag{17}$$

$$xd(x_0) = x(x_0^{-1}x_0) = (xx_0^{-1})(x_0^{-1})^{-1} = x. \tag{18}$$

Pentru relaţiile (17) şi (18) am folosit Definiţia 1.1. Din (17) obţinem $r(x_0)d(x_0) = d(x_0)$ iar din (18) avem $r(x_0)d(x_0) = r(x_0)$, deci $r(x_0) = d(x_0)$. Elementul $r(x_0) = d(x_0)$ îl notăm cu e şi din (17) şi (18) avem $ex = xe = x$ oricare ar fi $x \in G$.

Se observă că $d(e) = e^{-1}e = e^{-1}$ (pentru că e este elementul unitate) şi pe de altă parte avem

$$d(e) = e^{-1}e = (x_0^{-1}x_0)^{-1}(x_0^{-1}x_0) = (x_0^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_0) = ee = e.$$

Deci $e^{-1} = e$.
Avem $d(x) = d(xe) = d(e) = e$;
$r(x) = r(ex) = r(e) = d(e^{-1}) = d(e) = e$ (am folosit Propoziţia 1.3). Deci $d(x) = r(x) = e$ adică $x^{-1}x = xx^{-1} = e$.

Din cele demonstrate mai sus avem că G este grup.

Propoziţia 1.7. *Fie G grupoid. Atunci G este grup dacă şi numai dacă G° conţine un singur element.*

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că G este grup.
$G^\circ = d(G) = \{d(x) | x \in G\} = \{x^{-1}x | x \in G\} = \{e\}$ unde e este elementul unitate din grupul G.

Suficienţa. Presupunem că G° conţine un singur element pe care îl vom nota cu e. Vom arăta că $G^2 = G \times G$.(Ştim din Definiţia 1.1 că $G^2 \subseteq G \times G$).

Fie $(x, y) \in G \times G$; $\left.\begin{array}{r} d(x) \in G^\circ = \{e\} \\ r(x) \in G^\circ = \{e\} \end{array}\right\}$ rezultă că $d(x) = r(y) = e$,adică $(x, y) \in G^{(2)}$ (din Propoziţia 1.1)

Am obţinut $(x, y) \in G^{(2)}$, deci $G^{(2)} = G \times G$ şi folosind Propoziţia 1.6 va rezulta G grup.

2 Exemple

Pentru a clarifica noţiunea de grupoid vom prezenta patru exemple des întâlnite în bibliografie.

Exemplul 2.1. *Orice grup este grupoid.*

Într-un grup orice două elemente sunt compozabile deci există o aplicaţie produs $(x, y) \to xy[: G \times G \to G]$ unde $G^{(2)} = G \times G$.

De asemenea, într-un grup orice element admite un unic invers (notat x^{-1}) şi deci există o aplicaţie $x \to x^{-1}[: G \to G]$.

Se observă că cele 2 aplicaţii verifică axiomele grupoidului, deci G este grupoid. Mai putem remarca, în plus, că G° (spaţiul unitate) al acestui grupoid este format numai din elementul unitate al grupului.

Exemplul 2.2. *Grupoidul asociat unui grup care acţionează la dreapta pe o mulţime.*

Fie $(S, \circ)$ un grup şi U o mulţime nevidă astfel încât S acţionează la dreapta pe U, adică există aplicaţia " $\cdot$ " $: U \times S \to U$ cu proprietăţile:

$$u \cdot e = u \text{ oricare ar fi } u \in U; \tag{19}$$

$$(u \cdot g_1)g_2 = u \cdot (g_1 \circ g_2) \text{ oricare ar fi } u \in U \text{ şi } g_1, g_2 \in S. \tag{20}$$

Fie $G = U \times S$; se definesc $G^{(2)} : \{(u, s), (v, t) | v = u \cdot s\}$ şi operaţiile:

$$(u, s)(u \cdot s, t) := (u, s \circ t); \tag{21}$$

$$(u, s)^{-1} := (u \cdot s, s^{-1}) \tag{22}$$

care dau pe G structura de grupoid.

În continuare vom verifica axiomele grupoidului definit mai sus. Evident G este nevidă (U este nevidă şi S este nevidă). Aplicaţia produs [: $G^{(2)} \to G$] este bine definită deoarece $((u, s), (v, t)) \in G^{(2)}$, adică $v = u \cdot s$ atunci $(u, s)(u \cdot s, t) = (u, s \circ t) \in U \times S = G$. Aplicaţia inversă este bine definită deoarece $(u, s) \to (u \cdot s, s^{-1}) \in U \times S = G$.

Verificăm acum axioma (i) din Definiţia 1.1. Vrem să arătăm că $((u, s)^{-1})^{-1} = (u, s)$ oricare ar fi $(u, s) \in G$.

Din (22), (19) şi (20) avem

$$((u, s)^{-1})^{-1} = (u \cdot s, s^{-1})^{-1} = ((u \cdot s) \cdot s^{-1}, (s^{-1})^{-1}) = (u \cdot e, s) = (u, s).$$

Deci $((u, s)^{-1})^{-1} = (u, s)$ oricare ar fi $(u, s) \in U \times S$ şi prin urmare axioma (i) din definiţia grupoidului este verificată.

Vom verifica axioma (ii) din Definiţia 1.1.

Fie $((u_1, s_1), (u_2, s_2)) \in G^{(2)}$ şi $((u_2, s_2), (u_3, s_3)) \in G^{(2)}$; trebuie să demonstrăm

$$((u_1, s_1)(u_2, s_2), (u_3, s_3)) \in G^{(2)},$$

$$((u_1, s_1), (u_2, s_2)(u_3, s_3)) \in G^{(2)} \text{ şi}$$

$$[(u_1, s_1)(u_2, s_2)](u_3, s_3) = (u_1, s_1)[(u_2, s_2)(u_3, s_3)].$$

Cum $((u_1, s_1), (u_2, s_2)) \in G^{(2)}$ avem din definiţia lui $G^{(2)}$ relaţia

$$u_2 = u_1 \cdot s_1. \tag{23}$$

Analog din $((u_2, s_2), (u_3, s_3)) \in G^{(2)}$ avem

$$u_3 = u_2 \cdot s_2. \tag{24}$$

Folosind (24), (23) şi (20) obţinem:

$$u_3 = u_2 \cdot s_2 = (u_1 \cdot s_1) \cdot s_2 = u_1(s_1 \circ s_2).$$

Avem relaţia

$$u_3 = u_1(s_1 \circ s_2) \tag{25}$$

$(u_1, s_1)(u_2, s_2) = (u_1, s_1)(u_1 \cdot s_1, s_2) = (u_1, s_1 \circ s_2)$.
$((u_1, s_1)(u_2, s_2), (u_3, s_3)) \in G^{(2)}$ dacă şi numai dacă
$((u_1, s_1 \circ s_2), (u_3, s_3)) \in G^{(2)}$, adică $u_3 = u_1 \cdot (s_1 \circ s_2)$ (adevărat din (25)).
$(u_2, s_2)(u_3, s_3) = (u_2, s_2)(u_2 \cdot s_2, s_3) = (u_2, s_2 \circ s_3)$.
$((u_1, s_1), (u_2, s_2)(u_3, s_3)) \in G^{(2)}$ dacă şi numai dacă
$((u_1, s_1)(u_2, s_2 \circ s_3)) \in G^{(2)}$, adică $u_2 = u_1 \cdot s_1$ (adevărat din (23)).

$$[(u_1, s_1)(u_2, s_2)](u_3, s_3) = (u_1, s_1 \circ s_2)(u_3, s_3) = \tag{26}$$

$(u_1, s_1 \circ s_2)(u_1 \cdot (s_1 \circ s_2), s_3) = (u_1, (s_1 \circ s_2) \circ s_3)$.

Pentru relaţia (26) am folosit relaţia (25) şi definiţia compunerii a două elemente din $G^{(2)}$.

$$(u_1, s_1)[(u_2, s_2)(u_3, s_3)] = (u_1, s_1)(u_2, s_2 \circ s_3) = \tag{27}$$

$= (u_1, s_1)(u_1 \cdot s_1, s_2 \circ s_3) = (u_1, s_1 \circ (s_2 \circ s_3))$.

Din relaţiile (26), (27) şi din proprietatea de ascociativitate (în grupul S) avem

$$[(u_1, s_1)(u_2, s_2)](u_3, s_3) = (u_1, s_1)[(u_2, s_2)(u_3, s_3)].$$

Deci, axioma (ii) din definiţia grupoidului este verificată.

Vom trece, în continuare la verificarea axiomei (iii).

Arătăm că $((u,s)^{-1},(u,s)) \in G^{(2)}$ oricare ar fi $(u,s) \in G$ şi dacă $((u,s),(v,t)) \in G^{(2)}$ atunci avem $(u,s)^{-1}[(u,s),(v,t)] = (v,t)$.

$((u,s)^{-1},(u,s)) = ((u \cdot s, s^{-1}),(u,s)) \in G^{(2)}$ dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$u = (u \cdot s) \cdot s^{-1}. \tag{28}$$

Folosind relaţiile (19) şi (20) avem $(u,s) \cdot s^{-1} = u(s \circ s^{-1}) = u \cdot e = u$, deci relaţia (28) este îndeplinită şi, prin urmare, $((u,s)^{-1},(u,s)) \in G^{(2)}$ oricare ar fi $(u,s) \in G$.

Fie $((u,s),(v,t)) \in G^{(2)}$, deci

$$v = u \cdot s; \tag{29}$$

(30) $(u,s)^{-1}[(u,s),(v,t)] = (u,s)^{-1}[(u,s)(u \cdot s,t)] = (u,s)^{-1}(u, s \circ t) =$

$= (u \cdot s, s^{-1})(u, s \circ t) = (u \cdot s, s^{-1})((u \cdot s)s^{-1}, s \circ t) = (u \cdot s, s^{-1} \circ (s \circ t))$
$= (u \cdot s, t) = (v,t)$.

Pentru egalităţile din (30) am folosit definiţia compunerii a două elemente din $G^{(2)}$ şi relaţiile (29), (22), (28).

Din cele de mai sus se observă că axioma (iii) din definiţia grupoidului este verificată.

Verificarea axiomei (iv).

Arătăm că $((u,s),(u,s)^{-1}) \in G^{(2)}$ oricare ar fi $(u,s) \in G$ şi dacă $((v,t),(u,s)) \in G^{(2)}$ atunci $[(v,t)(u,s)](u,s)^{-1} = (v,t)$.
$((u,s),(u,s)^{-1}) = ((u,s),(u \cdot s, s^{-1})) \in G^{(2)}$ (evident din definiţia lui $G^{(2)}$).

Dacă $((v,t),(u,s)) \in G^{(2)}$ atunci

$$u = v \cdot t. \tag{31}$$

$$[(v,t)(u,s)](u,s)^{-1} = [(v,t)(v \cdot t, s)](u,s)^{-1} = \tag{32}$$

$= (v, t \circ s)(u \cdot s, s^{-1}) = (v, t \circ s)((v \cdot t) \cdot s, s^{-1}) =$
$= (v, t \circ s)(v \cdot (t \circ s), s^{-1}) = (v, (t \circ s) \circ s^{-1}) = (v,t)$.

Pentru egalităţile din (32) am folosit definiţia compunerii a 2 elemente din $G^{(2)}$ şi relaţiile (20), (22), (31).

Deci toate axiomele din definiţia grupoidului sunt verificate şi,
prin urmare, G definit în Exemplul 2.2 este grupoid.

Observaţii referitoare la acest grupoid

(a) $r(u,s) = (u,e)$; $\qquad d(u,s) = (u \cdot s, e)$.

Verificarea relaţiilor de la (a).

$r(u,s) = (u,s)(u,s)^{-1} = (u,s)(u \cdot s, s^{-1}) = (u, s \circ s^{-1}) = (u,e)$.

$d(u,s) = (u,s)^{-1}(u,s) = (u \cdot s, s^{-1})(u,s) = (u \cdot s, s^{-1})((u \cdot s)s^{-1}, s) =$
$= (u \cdot s, s^{-1} \circ s) = (u \cdot s, e)$.

La verificarea celor două relaţii am folosit definiţia aplicaţiei rang, respectiv a aplicaţiei domeniu precum şi relaţiile (20),(21), (22).

(b) Spaţiul unitate G° al grupoidului G este mulţimea $G^\circ = \{(u,e) | u \in U\}$ care poate fi identificată cu mulţimea U (se verifică imediat datorită punctului (a) şi definiţiei lui G°).

Exemplul 2.3. *Grupoidul $G^{(2)}$ (unde G este un grupoid oarecare). Fie G un grupoid şi $G^{(2)}$ mulţimea elementelor compozabile din G. Ştim că $G^{(2)}$ este o submulţime a lui $G \times G$.*

Se definesc: $(G^{(2)})^{(2)} := \{((x,y),(y',z)) | y' = xy\} \subset G^{(2)} \times G^{(2)}$ *şi operaţiile* $\begin{cases} (x,y)(xy,z) := (x,yz) \\ (x,y)^{-1} := (xy, y^{-1}) \end{cases}$ *care dau pe $G^{(2)}$ structura de grupoid.*

Demonstraţia este similară cu cea de la Exemplul 2.2. Se observă imediat că avem aceleaşi legi pentru cele două operaţii.

Exemplul 2.4. *Grupoidul ascociat unei relaţii de echivalenţă.*

Fie X o mulţime nevidă şi R o relaţie de echivalenţă pe X. Vom privi R ca o submulţime a produsului cartezian $X \times X$.

Evident $\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$ este submulţime a lui R.

Se definesc $R^{(2)} := \{((x,y),(y',z)) | y' = y\}$ şi operaţiile:

$$(x,y)(y,z) := (x,z); \tag{33}$$

$$(x, y)^{-1} := (y, x) \tag{34}$$

care dau lui R structura de grupoid.

În continuare vom verifica axiomele grupoidului definit mai sus.

Cum X este mulţime nevidă va rezulta că există cel puţin un $x \in X$ şi deci perechea $(x, x) \in R$. Prin urmare R este nevidă.

Din axiomele relaţiei de echivalenţă se observă imediat că operaţiile (33) şi (34) sunt bine definite.

Verificăm axioma (i) din definiţia grupoidului.

Vrem să arătăm că $((x, y)^{-1})^{-1} = (x, y)$ oricare ar fi $(x, y) \in R$.

Din (34) avem:

$$((x, y)^{-1})^{-1} = (y, x)^{-1} = (x, y).$$

Deci axioma (i) este verificată.

Verificarea axiomei (ii) din definiţia grupoidului.

Fie $((x, y), (y', z)) \in R^{(2)}$ şi $((y', z), (z', v)) \in R^{(2)}$;
Trebuie să demonstrăm

$$((x, y)(y', z), (z', v)) \in R^{(2)},$$

$$((x, y), (y', z)(z', v)) \in R^{(2)} \text{ şi}$$

$$[(x, y)(y', z)](z', v) = (x, y)[(y', z)(z', v)].$$

Cum $((x, y), (y', z)) \in R^{(2)}$ şi $((y', z), (z', v)) \in R^{(2)}$ obţinem, folosind definiţia lui $R^{(2)}$, relaţiile

$$y' = y, \tag{35}$$

$$z' = z. \tag{36}$$

$$[(x, y)(y', z)](z', v) = [(x, y)(y, z)](z', v) = (x, z)(z, v) = (x, v). \tag{37}$$

$$(x, y)[(y', z)(z', v)] = (x, y)[(y, z)(z, v)] = (x, y)(y, v) = (x, v). \tag{38}$$

În relaţiile (37) şi (38) am folosit (33), (34), (35) şi (36). Din (37) şi (38) ne va rezulta axioma (ii).

Trecem la verificarea axiomei (iii).

Arătăm că $((x,y)^{-1},(x,y)) \in R^{(2)}$ oricare ar fi $(x,y) \in R$ şi dacă $((x,y),(y',z)) \in R^{(2)}$ atunci avem:

$$(x,y)^{-1}[(x,y),(y',z)] = (y',z).$$

$((x,y)^{-1},(x,y)) = ((y,x),(x,y)) \in R^{(2)}$ (evident din definiţia lui $R^{(2)}$).

Fie $((x,y),(y',z)) \in R^{(2)}$ atunci

$$y' = y. \tag{39}$$

Avem egalităţile

$$(x,y)^{-1}[(x,y),(y',z)] = (x,y)^{-1}[(x,y),(y,z)] =$$

$= (y,x)(x,z) = (y,z) = (y',z)$. (am folosit relaţiile (33), (34) şi (39)).

Din cele de mai sus rezultă că axioma (iii) este verificată.

Mai avem de verificat ultima axiomă, axioma (iv).

Arătăm că $((x,y),(x,y)^{-1}) \in R^{(2)}$ oricare ar fi $(x,y) \in R$ şi dacă $((z,x')(x,y)) \in R^{(2)}$ atunci avem:

$$[(z,x')(x,y)](x,y)^{-1} = (z,x').$$

$((x,y),(x,y)^{-1}) = ((x,y),(y,x)) \in R^{(2)}$ (din definiţia lui $R^{(2)}$).

Fie $((z,x')(x,y)) \in R^{(2)}$ atunci avem

$$x' = x \text{ şi} \tag{40}$$

$$[(z,x')(x,y)](x,y)^{-1} = [(z,x)(x,y)](y,x) = (z,y)(y,x) = \tag{41}$$

$= (z,x) = (z,x')$.

Deci şi axioma (iv) este verificată.

În cele de mai sus s-au verificat toate axiomele grupoidului şi, prin urmare, R definit in Exemplul 2.4 este grupoid.

Observaţii referitoare la grupoidul R

(a) $r(x, y) = (x, x) \qquad d(x, y) = (y, y)$ oricare ar fi $(x, y) \in R$ (se verifică imediat folosind definiţia aplicaţiei rang, respectiv a aplicaţiei domeniu şi relaţiile (33), (34)).

(b) Spaţiul unitate R° al grupoidului R este mulţimea $\Delta = \{(x, x)|x \in R\}$ care poate fi identificată cu mulţimea X.

Verificare: $R^\circ = \{r(x, y)|(x, y) \in R\} = \{(x, x)|x \in R\} = \Delta$ (am folosit punctul (a) şi definiţa lui R°).

(c) Putem avea cazurile particulare:

(c2) $R = X \times X$ şi grupoidul R se va numi în acest caz *grupoidul trivial pe* X;

(c2) $R = \Delta$ şi grupoidul R se va numi în acest caz *grupoidul co-trivial pe* X.

Bibliografie

[1] G. W. Mackey, *Ergodic theory and virtual groups*, Math. Ann., 166 (1966), 187-207.

[2] P. S. Muhly, *Coordinates in Operator Algebra*, Amer. Mathematical Society, 1997-12, 544.

Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I. Raţiu, no. 5–7
550012 Sibiu - Romania
E-mail:totoialina@yahoo.com