Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 101-102

Generalizarea unei probleme din Gazeta Matematică [1]

Ecaterina Stamate

Abstract

In this paper we generalize a problem proposed in Gazeta Matematică.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50

Problema 25830 din [1] are următorul enunţ: *"Să se calculeze limita şirului* $(u_n), n \geq 2$, *dat de termenul general*

$$u_n = \frac{1 + 2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt[3]{3} + ... + n^3\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)(2n+1)}."$$

(Vasile Solovăstru, Felduc, Bistriţa Năsăud)

În această notă prezentăm câteva probleme analoage cu cea de mai sus:

1. *Fie* $p \in N^*$*; să aflăm*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^p\sqrt[3]{2} + 3^p\sqrt[3]{3} + ... + n^p\sqrt[n]{n}}{n(n+1)...(n+p-1)(an+b)}, a > 0, b > 0.$$

Conform lemei lui $Stolz - Cesáro$, avem

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)(n+2)...(n+p-1)[(p+1)an + p(a+b)]} = \frac{1}{(p+1)a}$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

[1] *Received 10 August 2007*

Accepted for publication (in revised form) 20 December 2007

Observaţia 1. *Pentru a=2, b=1 şi p=3 obţinem problema 25 830.*

2. În mod analog, obţinem

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^p\sqrt{2} + 3^p\sqrt[3]{3} + ... + n^p\sqrt[n]{n}}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p+1}.$$

3. Fie $(a_n), n \geq 1$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi raţa $r > 0$. Să calculăm

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2^p\sqrt{a_2} + a_3^p\sqrt[3]{a_3} + ... + a_n^p\sqrt[n]{a_n}}{a_n a_{n+1}...a_{n+p}}.$$

Avem

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^p\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{a_n a_{n+1}...a_{n+p}(a_{n+p-1} - a_n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + nr)^{p-1}}{[a_1 + (n+1)r][a_1 + (n+2)r)]...[a_1 + (n+p-1)r](p+1)r} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)r}.$$

Observaţia 2. *Pentru* $a_1 = 1$ *şi r=1 obţinem problema de la 2.*

4. În condiţiile problemei de la punctul 3 avem

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2^p\sqrt{a_2} + a_3^p\sqrt[3]{a_3} + ... + a_n^p\sqrt[n]{a_n}}{a_n a_{n+1}...a_{n+p}(an+b)} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)ar}.$$

Observaţia 3. *Pentru* $a = 2, b = 1, a_1 = 1, r = 1, p = 3$ *obţinem problema 25 830*

Bibliografie

[1] *Gazeta Matematică*, 7/2007