Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 3-7

Numărarea soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi [1]

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes a method for calculating the number of admitted solutions of the transportation problem in integer numbers.The mathematical model is the bijection between two multiple sets,briefly presented. We give an algorithm for this number calculation.

2000 Mathematical Subject Classification: 90C05

1 Introducere

În problema transporturilor din programarea liniară se consideră μ centre de aprovizionare, centrul i având o cantitate μ_i dintr-o marfă oarecare ($i = 1, 2, .., \mu$), precum şi m centre de consum, centrul j solicitând o cantitate l_j din marfa respectivă ($j = 1, 2, ..., m$). Se pune problema transportării mărfii din centrele de aprovizionare în centrele de consum astfel încât costul total al transportului, exprimat printr-o funcţie obiectiv liniară, să fie minim. Presupunând problema echilibrată, adică $\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i = \sum_{j=1}^{m}l_j = n$ şi notând cu x_{ij} cantitatea de marfă care se transportă din centrul de aprovizionare i în

[1] *Received 3 March 2007*

Accepted for publication (in revised form) 20 May 2007

centrul de consum j, se numeşte soluţie admisibilă a problemei orice soluţie a sistemului de ecuaţii:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i;\ \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij} = l_j;\ \lambda_i, l_j > 0;\ x_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

Sistemul are μm necunoscute si $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei de echilibru)([1]).
În continuare presupunem că numerele x_{ij} sunt naturale, iar numerele λ_i, l_j sunt naturale, strict pozitive. În acest caz, numărul soluţiilor sistemului (1) respectiv numărul soluţiilor admisibile ale problemei transportului în numere întregi (naturale) este finit, iar determinarea acestui număr este o problemă combinatorială echivalentă cu problema distribuirii a n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) în m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$ (a se vedea [3]).
Notăm acest număr astfel: $N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$

2 Modelul matematic

Modelul matematic al problemei enunţate mai sus este numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple ([3]). Expunem aici pe scurt acest model.

Se consideră două mulţimi finite X şi Y având acelaşi număr n de elemente precum şi mulţimea $B(X, Y)$ a bijecţiilor f definite pe X cu valori în Y. Se consideră o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinând câte λ_i elemente ($i = 1, 2, ..., \mu$). De asemenea, se consideră o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente ($j = 1, 2, ..., m$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta. Vom considera în continuare un grup G

de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupărilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X ([2]). Prin permutările acestui grup orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x. Analog, considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y. În sfârşit, pe baza celor două relaţii de echivalenţă anterioare se defineşte o relaţie de echivalenţă ρ pe mulţimea $B(X,Y)$, în felul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Afirmaţia că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă este demonstrată în lucrarea [3].
Această relaţie de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii bijecţiilor B(X,Y) în clase de echivalenţă.
Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$|B(X,Y)/\rho| = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

Pentru prezentarea completă a modelului matematic, a se vedea lucrarea [3].

3 Algoritm de calcul

Pentru calculul numărului:

$$N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus in [3] şi pe care îl reproducem în continuare:
a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde P_{λ_i} este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.
Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1} \mu\alpha_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m \\ x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda \end{array}$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat. Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n} \frac{1}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2!...n^{k_n}k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}, \quad k_1, k_2, ..., k_n \geq 0$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:
$p_1 = x_1$
$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$
$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$
$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya - de Brujin aplicată în cazul problemei noastre [a se vedea 2].

4 Observaţie

Mai remarcăm că numărul N reprezintă şi numărul matricilor cu μ linii si m coloane formate cu numere naturale, în care sumele liniilor şi coloanelor sunt impuse:

(2)

n	l_1	l_2	$\dots$	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_μ	$4x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\dots$	$x_{\mu m}$

5 Aplicaţie

Ca aplicaţie, propunem cititorului să verifice prin calcul egalităţile:

$$G_{6(2,2,1,1)}^{6(2,1,1,1,1)} = 102; \quad G_{7(3,1,1,1,1)}^{7(3,2,1,1)} = 114$$

şi să formuleze probleme corespunzătoare de numărare a soluţilor sistemului (1), respectiv a matricilor (2).

Bibliografie

[1] M. Maliţa, C. Zidăroiu, *Matematica organizării*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1971

[2] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[3] V.M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică - Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti 1986, pag. 78-81

[4] V.M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005

Universitatea "Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie "Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa