Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 41-50

Contraexemple ale teoremei lui Peano în spaţii Banach infinit dimensionale [1]

Georgeta Maniu, Raluca Sandu

Abstract

In this paper we present four examples to Cauchy′s problem for infinite dimensionals Banach spaces in which Peanoş theorem is not valable.

2000 Mathematical Subject Classification: 65L05

1 Introduction

Validitatea teoremei Peano de existenţă locală a soluţiilor unei probleme Cauchy în cazul spaţiilor Banach finit dimensionale este un rezultat clasic. În 1950 Dieudonné a construit un exemplu care probează că în spaţiul Banach C_0 al şirurilor convergente la zero, teorema lui Peano de existenţă locală a soluţiilor problemei Cauchy nu funcţionează. Problema determinării tipului de spaţiu pe care teorema lui Peano este validă a fost lansată pentru prima oară în anul 1969 de către Smolyanov. Invaliditatea teoremei în cazul infinit dimensional a fost probată încă o dată, independent, de către Godunov (1974) şi Yorke (1970) prin două contraexemple în cazul spaţiului Banach l_2. Răspunsul final la problema lansată de Smolyanov a fost dat în

[1] *Received 12 December 2007*

Accepted for publication (in revised form) 23 December 2007

1975 de către Godunov care a demonstrat că *orice spaţiu Banach pe care este adevărată teorema lui Peano, este finit dimensional* ([2]).

În această lucrare sunt prezentate patru exemple de probleme Cauchy în cazul unor spaţii Banach infinit dimensionale pentru care teorema lui Peano nu funcţionează. Primele trei exemple sunt variante ale unor exemple deja cunoscute ([1],[2],[4]). Exemplul patru are caracter de noutate şi a fost conceput plecând de la modelul foarte general de problemă Cauchy construit în demonstraţia teoremei lui Godunov ([3]).

2 Teorema lui Peano

Fie $I \subseteq R$ interval deschis şi B un spaţiu Banach finit dimensional. Clasica teoremă a lui Peano poate fi formulată astfel:

Teoremă. *Fie $F : I \times B \to B$ o funcţie continuă, $(t_0, x_0) \in I \times B$ şi fie $a > 0$, $r > 0$ astfel încât $[t_0 - a, t_0 + a] \times S(x_0, r) \subseteq I \times B$.*

Atunci există cel puţin o soluţie $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to S(x_0, r)$ a problemei Cauchy $\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$*, unde* $S(x_0, r) = \{x \in B / \|x - x_0\| \leq r\}$,

$\delta = \inf\left(a, \dfrac{r}{M}\right)$, $M = \sup\{\|F(t,x)\| / (t,x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times S(x_0, r)\}$.

3 Contraexemple ale teoremei lui Peano

Exemplul 1. Considerăm spaţiul Banach infinit dimensional (C_0) al tuturor şirurilor numerice $x = (x_n)_n$ cu $x_n \to 0$ când $n \to \infty$, dotat cu norma

$$\|x\| = \sup\{|x_n| / n = 1, 2, ...\}.$$

Fie funcţia $f : (C_0) \to (C_0)$ definită prin $f(x) = \left(\sqrt{|x_n| + \alpha_n^2}\right)_n$, unde $x = (x_n)_n$ şir din (C_0) şi $(\alpha_n)_n$ şir de numere reale pozitive cu $\alpha_n \to 0$ când $n \to \infty$.

Considerăm problema Cauchy

$$
\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{3.1}
$$

unde $F : I \times (C_0) \to (C_0)$, $F(t, x) = f(x)$, $I \subseteq R$ interval , $0 \in I$ şi x^0 este şirul constant 0, $x^0 \in (C_0)$.

Vom arăta că pentru problema Cauchy (2.1.) este îndeplinită ipoteza teoremei lui Peano de continuitate a funcţiei $F : I \times (C_0) \to (C_0)$, dar problema nu are soluţie pe nici un interval $[0, a)$, $a > 0$ (nu avem existenţă locală).

Demonstraţie. Arătăm pentru început că funcţia F este bine definită, adică pentru $(t, x) \in I \times (C_0)$ avem că $F(t, x) \in (C_0)$. Într-adevăr, $F(t, x) = f(x) = f((x_n)_n) = \left(\sqrt{|x_n| + \alpha_n^2}\right)_n$. Cum $(\alpha_n)_n \in (C_0)$, $(x_n)_n \in (C_0)$ şi $\sqrt{|x_n| + \alpha_n^2} \le \sqrt{|x_n|} + \sqrt{\alpha_n^2}$ obţinem că $f(x) \in (C_0)$.

Arătăm că funcţia $F : I \times (C_0) \to (C_0)$, $F(t, x) = f(x)$este continuă. Este suficient să arătăm că $f : (C_0) \to (C_0)$ este funcţie continuă.

Fie şirul $\left(x^k\right)_k$ de elemente din (C_0), ($x^k = (x_n^k)_n \in (C_0)$) şi $x^0 = (x_n^0)_n \in (C_0)$, astfel ca $x^k \to x^0$ când $k \to \infty$, în topologia lui (C_0), adică

$$
\left\|x^k - x^0\right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2}
$$

Vrem să arătăm că $f(x^k) \to f(x^0)$ când $k \to \infty$, adică $\left\|f(x^k) - f(x^0)\right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, unde $f(x^k) = \left(\sqrt{|x_n^k| + \alpha_n^2}\right)_n$,
$f(x^0) = \left(\sqrt{|x_n^0| + \alpha_n^2}\right)_n$.

Rămâne să arătăm că:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon$ astfel încât $\left\|f(x^k) - f(x^0)\right\| < \varepsilon\ \forall k \ge k_\varepsilon \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon$ astfel încât $\sup\limits_n \left|\sqrt{|x_n^k| + \alpha_n^2} - \sqrt{|x_n^0| + \alpha_n^2}\right| < \varepsilon$, $\forall k \ge k_\varepsilon$.

Din inegalitatea$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \le |a - b|$, obţinem că
$\left|\sqrt{|x_n^k| + \alpha_n^2} - \sqrt{|x_n^0| + \alpha_n^2}\right|^2 \le \left||x_n^k| - |x_n^0|\right| \le \left|x_n^k - x_n^0\right|$, echivalent cu

$$
\left|\sqrt{|x_n^k| + \alpha_n^2} - \sqrt{|x_n^0| + \alpha_n^2}\right| \le \sqrt{|x_n^k - x_n^0|} \forall k, \forall n \tag{3.3}
$$

Din (2.2.) se obţine:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon$astfel încât $\left\|x^k - x^0\right\| = \sup\limits_n \left|x_n^k - x_n^0\right| < \varepsilon\ \forall k \geq k_\varepsilon$, de unde rezultă:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon \text{astfel încât } \left|x_n^k - x_n^0\right| < \varepsilon,\ \forall k \geq k_\varepsilon, \forall n \in N \tag{3.4}$$

Din (2.3.) şi (2.4.) se obţine:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon$ astfel încât $\sup\limits_n \left|\sqrt{|x_n^k| + \alpha_n^2} - \sqrt{|x_n^0| + \alpha_n^2}\right| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $\forall k \geq k_\varepsilon$.

Alegem $\widetilde{k_\varepsilon} = k_{\varepsilon^2}$.

Atunci, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\,\widetilde{k_\varepsilon}$ astfel încât $\forall k \geq \widetilde{k_\varepsilon}$ $\left\|f(x^k) - f(x^0)\right\| \leq \varepsilon$, echivalent cu a spune că f este continuă.

Revenind la problema Cauchy (2.1), cunoaştem:

Pentru $t \in I$ fixat, $x(t) \in (C_0)$, echivalent cu $x(t) = (x_n(t))_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), ...x_n(t), ...),$$

$$x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t), ...x_n'(t), ...),$$

$$F(t, x(t)) = f(x(t)) = \left(\sqrt{|x_n(t)| + \alpha_n^2}\right)_n =$$

$$= \left(\sqrt{|x_1(t)| + \alpha_1^2}, \sqrt{|x_2(t)| + \alpha_2^2}, ..., \sqrt{|x_n(t)| + \alpha_n^2}, ...\right)$$

Problema (2.1.) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} x_i^{/}(t) = \sqrt{|x_i(t)| + \alpha_i^2} \\ x_i(0) = 0 \end{cases} , i = 1, 2, ..., n, ... \tag{3.5}$$

Presupunem că (2.5.) are o soluţie $\varphi : [0, a) \to (C_0)$, $t \to \varphi(t) = (\varphi_i(t))_i$. Atunci derivata funcţiei φ în spaţiul Banach (C_0) este $\varphi'(t) = (\varphi_i'(t))_i$, unde $\varphi_i'(t) = \sqrt{|\varphi_i(t)| + \alpha_i^2}$ $\forall i \in N^*$, $\forall t \in [0, a)$. Observăm că $\varphi_i'(t) \geq 0$ pentru orice t, de unde rezultă că este crescătoare . Mai mult, $\varphi_i(0) = 0$, ceea ce implică $\varphi_i(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [0, a)$ şi $\varphi_i'(t) = \sqrt{\varphi_i(t) + \alpha_i^2}$

Rezolvăm ecuaţia diferenţială

$$y' = \sqrt{y+\alpha_i^2} \tag{3.6}$$

echivalentă cu $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{y+\alpha_i^2}$,
de unde $\dfrac{1}{\sqrt{y+\alpha_i^2}}dy = dt$.
Integrăm şi obţinem $\int \dfrac{1}{\sqrt{y+\alpha_i^2}}dy = \int dt$
sau $2\sqrt{y+\alpha_i^2} = t + c$
sau $\sqrt{y+\alpha_i^2} = \dfrac{t}{2} + c$,
de unde $y(t) = \left(\dfrac{t}{2}+c\right)^2 - \alpha_i^2$.
De aici avem $y(t) = \dfrac{t^2}{4} + ct + c^2 - \alpha_i^2$.
Din $y(0) = 0$ obţinem $c = \pm\alpha_i$, ceea ce înseamnă că $y(t) = \dfrac{t^2}{4} \pm \alpha_i t$.

Revenind la problema noastră Cauchy, obţinem soluţia $\varphi_i(t) = \dfrac{t^2}{4} \pm \alpha_i t$ $\forall i \in N^*$, $\forall t \in [0,a)$.

Alegem $t_0 \in [0,a)$, $t_0 \neq 0$. Atunci $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t_0) = \lim\limits_{i\to\infty}(\dfrac{t_0^2}{4} \pm \alpha_i t_0) = \dfrac{t_0^2}{4} \neq 0$, de unde rezultă că $(\varphi_i(t_0))_i \notin (C_0)$, ceea ce este o contradicţie.

Am obţinut aşadar că problema Cauchy (2.1.) nu are soluţie în spaţiul Banach infinit dimensional (C_0).

Exemplul 2. Considerăm spaţiul Banach infinit dimensional (C_0) al tuturor şirurilor numerice $x = (x_n)_n$ cu $x_n \to 0$ când $n \to \infty$, dotat cu norma

$$\|x\| = \sup\{|x_n| / n = 1, 2, ...\}.$$

Fie funcţia $f : (C_0) \to (C_0)$definită prin $f(x) = f((x_n)_n) = \left(2\sqrt{|x_n|}\right)_n$, unde $x = (x_n)_n$ şir din (C_0).

Considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{3.7}$$

unde $F : I \times (C_0) \to (C_0)$, $F(t, x) = f(x)$, $I \subseteq R$ interval, $0 \in I$ şi $x^0 = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_n$, $x^0 \in (C_0)$.

Se observă că pentru problema Cauchy (2.7.) este îndeplinită condiţia ca funcţia $F : I \times (C_0) \to (C_0)$ să fie continuă, dar problema nu admite soluţie $t \to \varphi(t)$, $\varphi(t) \in (C_0)$pe nici un interval $[0, a)$, $a > 0$.

Demonstraţie. Presupunem că problema (2.7.), scrisă echivalent ca:

$$\begin{cases} x_i'(t) = 2\sqrt{|x_i(t)|} \\ x_i(0) = \dfrac{1}{i^2} \end{cases}, i = 1, 2, ..., n, ... \tag{3.8}$$

admite soluţie $t \to \varphi(t) = (\varphi_n(t))_n$, $\varphi(t) \in (C_0)$ pe intervalul $[0, a)$.

Observăm că $\varphi_i'(t) \geq 0$ pentru orice t, de unde rezultă că φ_i este crescătoare. Mai mult, $\varphi_i(0) = \dfrac{1}{i^2} > 0$, ceea ce implică $\varphi_i(t) > 0$ pentru orice $t \in [0, a)$ şi, prin urmare, $\varphi_i'(t) = 2\sqrt{\varphi_i(t)}$.

Rezolvăm ecuaţia diferenţială

$$y' = 2\sqrt{y} \tag{3.9}$$

Avem $\dfrac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}$ sau $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy = dt$.

Integrăm şi avem

$\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int dt$, de unde $\sqrt{y} = t + c$, adică $y(t) = (t + c)^2$.

Din $y(0) = \dfrac{1}{i^2}$ obţinem $c = \pm\dfrac{1}{i}$, ceea ce înseamnă că $y(t) = \left(t \pm \dfrac{1}{i}\right)^2$.

Revenind la problema noastră Cauchy, obţinem soluţia $\varphi_i(t) = \left(t \pm \dfrac{1}{i}\right)^2$ $\forall i \in N$, $\forall t \in [0, a)$.

Alegem $t_0 \in [0, a)$, $t_0 \neq 0$. Atunci $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t_0) = \lim\limits_{i\to\infty} \left(t_0 \pm \frac{1}{i}) \right)^2 = t_0^2 \neq$ 0, de unde rezultă că $\varphi(t_0) = (\varphi_i(t_0))_i \notin (C_0)$, ceea ce este o contradicţie.

Exemplul 3. Considerăm spaţiul Banach infinit dimensional notat cu $\Re_\infty$al tuturor şirurilor de numere reale cu un număr finit de termeni nenuli, înzestrat cu norma $\|x\| = \|(x_n)_n\| \sup\{|x_n|/n = 1, 2, ...\}$. Fie funcţia $f :$ $\Re_\infty \to \Re_\infty$, $f(x) = f((x_n)_n) = (1, x_1, x_2, x_3, ..., \underbrace{x_{n-1}}_{pozitia"n"}, x_n, ...)$.

Definim funcţia $F : R \times \Re_\infty \to \Re_\infty$ prin $F(t, x) = f(x)$. Se observă uşor că Feste funcţie continuă.

Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \tag{3.10}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{cases} x_n^{/}(t) = x_{n-1}(t) \quad n \geq 2 \\ x_1^{/}(t) = 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Vom proba că ecuaţia (2.11.) nu are soluţii pe nici un interval real.

Demonstraţie. Fie $I = (\alpha, \beta) \subseteq R$. Presupunem că există $\varphi : I \to \Re_\infty$ soluţia ecuaţiei (2.11.). Se poate arăta uşor prin inducţie că

$$\varphi_n(t) = \frac{t^n}{(n)!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j t^j}{j!} \tag{3.12}$$

unde c_j sunt constante reale.

Într-adevăr,

$\varphi_1'(t) = 1$ implică $\varphi_1(t) = t + c_1$

$\varphi_2'(t) = \varphi_1(t)$ implică $\varphi_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$

....

$\varphi_n'(t) = \varphi_{n-1}(t)$ implică $\varphi_n(t) = \frac{t^n}{(n)!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j t^j}{j!}$.

Considerăm, pentru orice $n \geq 2$, mulţimile $A_n = \{t \in I/\varphi_n(t) = 0\}$ şi $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Cum φ_n este un polinom de grad cel mult n rezultă că numărul elementelor mulţimii A_n este cel mult egal cu n, de unde rezultă că mulţimea A este cel mult numărabilă. Prin urmare putem alege un element $s \in I\backslash A$, şi din definiţia lui A deducem că $\varphi_n(s) \neq 0$ pentru orice $n \geq 2$. Obţinem în acest fel că $\varphi(s) \notin \Re_\infty$, ceea ce este o contradicţie.

Exemplul 4. (Un nou contraexemplu al teoremei lui Peano)

Fie spaţiul Banach infinit dimensional (C_0) al tuturor şirurilor numerice $x = (x_n)_n$ cu $x_n \to 0$ când $n \to \infty$, dotat cu norma

$\|x\| = \sup\{|x_n|\, n = 1, 2, ...\}$.

Fie funcţia $F : R \times (C_0) \to (C_0)$ definită astfel:

(3.13)
$$F(t,x) = \begin{cases} (0,0,0,.......,0,........,0,............ \; ,t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right] \\ (0,0,0...0,\underbrace{(t - \frac{1}{2n+1})(\frac{1}{2n} - t)x_n}_{pozitia\text{"}n\text{"}},0,0,... \; ,t \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right) \\ (0,0,0,.......,0,........,0,............ \; ,t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] \end{cases}$$

Considerăm ecuaţia diferenţială următoare:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \tag{3.14}$$

unde funcţia $F : R \times (C_0) \to (C_0)$ a fost definită mai sus.

Se observă că funcţia este continuă pe $R \times (C_0)$. Vom arăta că ecuaţia (2.14.) nu are soluţie pe nici un interval $[0, a)$, $a > 0$.

Demonstraţie. Fie $[0, a)$ cu $a > 0$. Atunci există $n \in N$astfel încât $\dfrac{1}{2n} < a$. Rezultă de aici că intervalele $\left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right) \subset (0, a)$, respectiv $\left[\dfrac{1}{2n+2}, \dfrac{1}{2n+1}\right] \subset (0, a)$.

Presupunem că ecuaţia (4.2.) admite o soluţie pe intervalul $[0, a)$, adică există funcţia $\varphi : [0, a) \to (C_0)$, $\varphi = (\varphi_n)_n$, diferenţiabilă astfel încât

$\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = F(t, x(t))$, echivalent cu ?:

$$(x_1'(t), x_2'(t), ...x_n'(t), ...) =$$

$$= \begin{cases} (0,0,0,.......,0,......,0,..... & ,t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] \\ (0,0,0...0, \underbrace{(t - \dfrac{1}{2n+1})(\dfrac{1}{2n} - t)x_n(t), 0, 0, ..}_{pozitia"n"} & ,t \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right) \end{cases}$$

Atunci, pentru $t \in \left[\dfrac{1}{2n+2}, \dfrac{1}{2n+1}\right] \bigcup \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\right]$ obţinem $x_i'(t) = 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n, ...$ şi pentru $t \in \left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right)$ obţinem $x_i'(t) = 0$, $\forall i \neq n$, respectiv $x_n'(t) = \left(t - \dfrac{1}{2n+1}\right)\left(\dfrac{1}{2n} - t\right) x_n(t)$.

Rezolvăm ecuaţia

$$y' = \left(t - \frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{1}{2n} - t\right) y \tag{3.15}$$

echivalentă cu $\dfrac{dy}{dt} = \left(t - \dfrac{1}{2n+1}\right)\left(\dfrac{1}{2n} - t\right) y$

sau $\dfrac{1}{y}dy = \left(t - \dfrac{1}{2n+1}\right)\left(\dfrac{1}{2n} - t\right)$.

Integrăm şi obţinem

$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int \left(t - \frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{1}{2n} - t\right) dt$

de unde $y(t) = \pm \exp\left\{-\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1}) - \dfrac{t}{2n(2n+1)} + c\right\}$

Am obţinut $\varphi_n(t) = \pm \exp\left\{-\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}\left(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1}) - \dfrac{t}{2n(2n+1}\right) + c\right\}$ pentru $t \in \left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right)$.

Constanta c se determină impunând condiţia ca funcţia $\varphi_n(.)$să fie continuă pe tot domeniul de definiţie, în particular şi în punctul $\dfrac{1}{2n+1}$.

Fixăm un punct $t_0 \in \left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right)$. Pentru acest t_0 se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t_0) =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\{\pm\exp(-\frac{t_0^3}{3}+\frac{t_0^2}{2}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{t_0}{2n(2n+1)}+c)\}=\pm\exp(-\frac{t_0^3}{3}+c)\neq 0$. Prin urmare $\varphi(t_0)\notin(C_0)$, ceea ce este o contradicţie.

Bibliografie

[1] Nicolae Pavel, *Ecuaţii diferenţiale asociate unor operatori neliniari pe spaţii Banach, Editura Academiei Socialiste România, Bucureşti, 1977.*

[2] A.N. Godunov, *Counterexample to Peano's theorem in infinite – dimensional Hilbert Spaces*, Vestnik Mosk, Gosud. Univ., 5, (1972), 31-34.

[3] A.N. Godunov, *Asupra teoremei lui Peano în spaţii Banach*, Functional Anal. i evo prilojenia, 9, (1975), 59-60.

[4] S. A. Shkarin, *Counterexample to Peano's theorem in infinit – dimensional F Spaces*, Mathematical Notes, Vol. 62, No.1, 1997.

Asistent universitar drd. Maniu Georgeta
Facultatea Litere şi Ştiinţe
Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti

Studentă Sandu Raluca
Facultatea de Inginerie Mecanică şi Electrică
Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti