Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 79-84

Teoreme de Analiză Matematică - I (teorema Weierstrass-Bolzano) [1]

Silviu Crăciunaş, Petrică Dicu, Mioara Boncuţ

Abstract

In this paper we propose a Weierstrass - Bolzano theorem′s demostration based on real number axiomatic construction, fact that allows to place it before series convergence.

2000 Mathematical Subject Classification: 03E99, 11B99

Teorema 1. *O submulţime mărginită şi infinită de numere reale are cel puţin un punct de acumulare.*

Vom considera în primul rând câteva abordări ale acestei teoreme în tratate cunoscute de Analiză Matematică în care demonstraţiile teoremei sunt tributare plasării acesteia înainte de studiul şirurilor de numere reale. Pentru a nu permite nici un fel de interpretări, menţionăm că acest material, sau părţi ale sale, nu se constituie ca observaţii critice asupra acestor monografii pe care le utilizăm cu deosebită consideraţie faţă de conţinutul acestora şi cu mare respect faţă de autori, nume de marcă în şcoala românească de matematică.

În monografia de Analiză Matematică [2], vol I, autori Academician Miron Nicolescu, Nicolae Dinculeanu, Solomon Marcus, ediţia din 1966,

[1] *Received 19 May 2007*

Accepted for publication (in revised form) 25 October 2007

Editura Didactică şi Pedagogică, demonstraţia se bazează pe o proprietate enunţată la pag. 37.

Propoziţia 1. *Dacă* $(a_n)_n$ *şi* $(b_n)_n$ *sunt două şiruri de numere raţionale care au proprietăţile*

1. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_m \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \; \forall \; m, n \in \mathbb{N}$

2. pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ *există* $n \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $b_n - a_n < \alpha$

atunci există un număr real x_0 *şi numai unul astfel încât* $a_n \leq x_0 \leq b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Afirmaţia nu este demonstrată făcându-se referire la convergenţa şirurilor definită ulterior.

În tratatul de Analiză Matematică [4], autor Marcel Roşculeţ, Editura Didactică şi Pedagogică, 1979, teorema Weierstrass-Bolzano, enunţată la pag. 45, este demonstrată urmând aceeaşi paşi ca în tratatul anterior dar existenţa lui x_0 este justificată prin construcţia numerelor iraţionale cu ajutorul şirurilor de numere raţionale, raţionament exemplificat la pag. 14-17 pentru $\sqrt{2}$.

În alte tratate de Analiză Matematică teorema este scoasă din contextul structurii topologice a lui $\mathbb{R}$ şi demonstrată complet după introducerea convergenţei şirurilor.

Propunem o demonstraţie a teoremei care să utilizeze definiţia axiomatică a numerelor reale şi proprietăţi rezultate pentru mulţimea numerelor reale.

Definiţia 1. *Numim sistem de numere reale sau mulţime a numerelor reale orice corp comutativ* $\mathbb{K}$ *faţă de două operaţii notate* $+$ *şi* $\cdot$ *având proprietăţile:*

I. Corpul $\mathbb{K}$ *este total ordonat printr-o relaţie de ordine notată* $\leq$ *pentru care*

a. pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$ *cu* $x \leq y$ *avem* $x + z \leq y + z$ *oricare ar fi* $z \in \mathbb{K}$

b. pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$ *cu* $x \geq 0$ *şi* $y \geq 0$ *avem* $x \cdot y \geq 0$

II. Corpul $\mathbb{K}$ *este complet ordonat, adică orice submulţime* A *a lui* $\mathbb{K}$ *care este majorată admite o margine superioară în* $\mathbb{K}$.

Definiţia 2. *Fie $\mathbb{R}$ sistemul de numere reale şi A o submulţime nevidă. Spunem că A este inductivă dacă pentru orice $x \in A$ rezultă $x + 1 \in A$.*

Putem remarca următoarele:

1. Mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$ este inductivă.

2. Intersecţia oricărei familii de mulţimi inductive ce conţin pe 0 este deasemenea inductivă.

Definiţia 3. *Fie $\mathcal{A}$ familia de mulţimilor inductive conţinând numărul real 0. Mulţimea $\mathbb{N}$ definită ca intersecţia tuturor elementelor lui $\mathcal{A}$ se numeşte mulţimea numerelor naturale.*

În continuare vom prezenta câteva rezultate cunoscute referitoare la interacţiunea dintre mulţimea numerelor reale şi mulţimea numerelor naturale.

Teorema 2. *Pentru orice număr real x există un număr natural m aşa încât să avem*
$$x \leq m \leq x + 1.$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Presupunem că $x > n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În consecinţă mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită deci ar admite o margine superioară $z \in \mathbb{R}$. Din definiţia marginei superioare rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu $z - 1 < n_0 < z$, de unde avem că $z = \sup \mathbb{N} < n_0 + 1$ absurd deoarece $\mathbb{N}$ este inductivă şi ca atare $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Aşadar există un $m \in \mathbb{N}$ cu $x \leq m$.

Fie mulţimea
$$A = \{n \in \mathbb{N}/x < n\}.$$
Mulţimea A este mărginită inferior deci există $y \in \mathbb{R}$ cu $y = \inf A$. Din definiţia infimumului există pentru un $\epsilon < 1$ un $m_0 \in A$ cu $y < m_0 < y + \epsilon$. Fie $n \in A$ arbitrar. Evident nu putem avea $n < y$. Aşadar avem fie $y < n < m_0 < y + \epsilon$ fie $m_0 < n$. În prima situaţie ar rezulta că $m_0 - n < \epsilon$ absurd. Aşadar pentru orice $n \in A$ avem $m_0 < n$ ceea ce înseamnă că $m_0 = \inf A$. Întrucât $m_0 \in A$ rezultă că $x < m_0$ iar dacă am avea $x+1 < m_0$

ar rezulta că $x < m_0 - 1$ deci m_0 nu ar mai fi $\inf A$ absurd. Aşadar avem şi relaţia $m_0 < x + 1$.

Teorema 3. *(principiul sau axioma lui Arhimede). Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $y > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $x \leq ny$.*

Demonstraţie. Dacă $x \leq 0$ putem lua $n = 1$. Dacă $x > 0$ având în vedere că $xy^{-1} > 0$, putem aplica teorema precedentă. Deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $xy^{-1} < n$ de unde rezultă afirmaţia.

Teorema 4. *(principiul Cantor-Dedekind) Pentru orice familie numărabilă de intervale inchise $I_n = [a_n, b_n]$ cu $I_{n+1} \subset I_n$ avem că $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. Din $I_{n+1} \subset I_n$ avem inegalităţile

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_m < \ldots < b_2 < b_1,$$

deoarece în caz contrar, adică dacă ar exista n_0, m_0 numere naturale cu $b_{m_0} < a_{n_0}$ atunci luând $k = \max\{n_0, m_0\}$ am obţine $b_{m_0} < a_{n_0} < a_k < b_k$ absurd pentru $m_0 < k$.

Mulţimea $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ este majorată superior deci există $\alpha = \sup A$.

Avem că $\alpha < b_m \ \forall \ m \in \mathbb{N}$. Întradevăr, în caz contrar ar exista un $m_0 \in \mathbb{N}$ cu $b_{m_0} < \alpha$ şi în consecinţă există şi un a_{n_1} cu $b_{m_0} < a_{n_1} < \alpha$ fapt ce contravine faptului că cele două familii de numere reale nu se amestecă.

Mulţimea $B = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$ este minorată inferior deci există $\beta = \inf B$. Urmând acelaşi raţionament rezultă că $a_n < \beta \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta prin reducere la absurd că $\alpha < \beta$.

Dacă avem $\beta \leq \alpha$ atunci există a_n cu $\beta < a_n < \alpha$ şi având în vedere prima inegalitate rezultă că există un b_m cu $\beta < b_m < a_n$ fapt ce ne conduce tot la o contradicţie. Aşadar α şi β sunt două numere reale cu proprietatea că $a_n < \alpha < \beta < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi în consecinţă rezultă că intersecţia familiei de intervale este nevidă conţinând intervalul $[\alpha, \beta]$.

Teorema 5. *(Weierstrass-Bolzano) O submulţime mărginită şi infinită de numere reale are cel puţin un punct de acumulare*

Demonstraţie. Fie A o mulţime mărginită şi infintă de numere reale. Există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < x < b$ pentru orice $x \in A$. Luăm $a_0 = a$, $b_0 = b$ şi considerăm $c = \frac{a_0+b_0}{2}$. Avem că cel puţin unul din intervalele $[a_0, c]$, $[c, b_0]$ conţine o infinitate de elemente din A. Notăm acest interval prin $[a_1, b_1]$. Avem că $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ şi că $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Repetând raţionamentul rezultă o familie de intervale $I_n = [a_n, b_n]$ cu proprietăţile

a. $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Prima proprietate ne permite să aplicăm teorema anterioară şi să afirmăm că intersecţia familiei de intervale este nevidă, adică va conţine intervalul $[\alpha, \beta]$ definit în demonstraţia principiului lui Cantor-Dedekind.

Vom demonstra, folosind a doua proprietate şi principiul lui Arhimede că intersecţia familiei de intervale se reduce la un singur număr real, adică faptul că $\alpha = \beta$.

Din $a_n < \alpha < \beta < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă că

$$\beta - \alpha < b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

şi obţinem

$$2^n(\beta - \alpha) < b - a \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aplicând principiul lui Arhimede pentru $x = b - a$ şi pentru $y = \beta - \alpha > 0$ rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ cu

$$b - a < n(\beta - \alpha) < 2^n(\beta - \alpha)$$

fapt ce contrazice inegalitate stabilită anterior, respectiv

$$2^n(\beta - \alpha) < b - a \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Să notăm prin x_0 valoarea comună a lui α şi β. Vom arăta că x_0 este punct de acumulare pentru mulţimea A.

Fie $V = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ o vecinătate a lui x_0. Demonstrăm mai întâi că există a_n şi b_m cu

$$x_0 - \epsilon < a_n < b_m < x_0 + \epsilon.$$

Dacă pentru orice n avem că $a_n < x_0 - \epsilon$ atunci obţinem că $[x_0 - \epsilon, x_0] \sqsubseteq [a_n, b_n]$ pentru orice n deci ar rezulta că intersecţia intervalelor nu se reduce la un punct. Similar se obţine existenţa lui b_m cu proprietatea menţionată. În fapt inegalităţile

$$x_0 - \epsilon < a_n < b_m < x_0 + \epsilon.$$

rezultă imediat şi din construcţia lui α şi β. Fie în continuare $k = max\{n, m\}$. Avem inegalităţile

$$x_0 - \epsilon < a_n < a_k < b_k < b_m < x_0 + \epsilon.$$

şi deorece intervalul $[a_k, b_k]$ conţine o infintate de elemente din mulţimea A rezultă că x_0 este un punct de acumulare al mulţimii.

Bibliografie

[1] Colojoară I., *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1983).

[2] Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., *Analiză Matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1966).

[3] Iacob F., *Note de curs*, Universitatea ”Alexandru Ioan Cuza” Iaşi (http://thor.info.uaic.ro/ fliacob/An1/2004-2005/Semestrul1/Multimi.pdf)

[4] Roşculeţ M., *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1979).

Lucian Blaga University,
Department of Mathematics,
Sibiu- Romania
E-mail: silviu.craciunas@ulbsibiu.ro