Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 51-56

Paradoxuri matematice [1]

Ileana Buzatu

Abstract

In this paper we present some interesting paradoxical results that take place when we use in demonstration some hidden errors.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50

Paradoxurile sunt raţionamente matematice care conduc la concluzii absurde ca urmare a unor greşeli ascunse. Mai putem spune că paradoxul este un enunţ contradictoriu şi în acelaşi timp demonstrabil, este o afirmaţie care poate fi demonstrată şi ca adevărată şi ca falsă.

În domeniul "Matematicii recreative" paradoxurile matematice s-au bucurat de foarte multă simpatie din partea cititorilor, poate şi datorită faptului că nimeni nu se aşteaptă să întâlnească absurdităţi, contradiciţii, concluzii neologice sau inexactităţi în cea mai exactă dintre ştiinţe "Matematica", precum şi faptul că problema de a se găsi unde s-a strecurat greşeala este pasionantă. Se întelege de la sine că demonstraţia unei absurdităţi nu poate fi corectă. O asemenea demonstraţie conţine întotdeauna o "hibă". A o căuta şi a o găsi, este un exerciţiu pe cât de plăcut şi de amuzant, pe atât de util, căci reprezintă un bun examen al cunoştiinţelor matematice şi un excelent antrenament al spiritului de observaţie şi de analiză.

[1] *Received 18 May 2007*

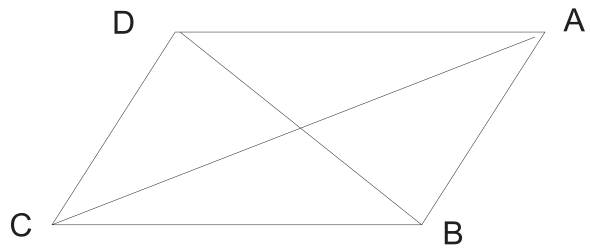
Accepted for publication (in revised form) 20 July 2007

Trebuie menţionat şi faptul că nu trebuie să exectuăm niciodată cu numerele decât operaţiile permise, iar în ceea ce priveşte geometria, cităm definiţia formulată de către Henri Poincare:

"Geometria este arta de a raţiona corect pe figuri incorecte."

1 Aplicaţii

1. "Orice paralelogram este dreptunghi"



Se ştie că "în orice paralelogram, suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor".

Deci, în paralelogramul $ABCD$ vom avea:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

Dar $AB = CD$ ca laturi opuse şi $AD = BC$ ca laturi opuse. Atunci $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BC^2$.

Din teorema lui Ptolomeu: "Produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse", obţinem:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

Dar, $AB = CD$, $BC = AD$ şi rezultă că

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot BD,$$

de unde prin înmulţire cu 2 obţinem

$$2(AB^2 + BC^2) = 2AC \cdot BD$$

Avem:

$$2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$$

$$2(AB^2 + BC^2) = 2AC \cdot BD.$$

Se scad cele două relaţii şi se obţine:

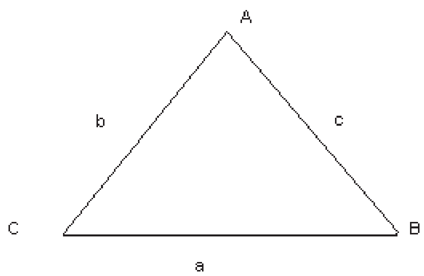
$$0 = AC^2 + BD^2 - 2AC \cdot BD$$

$$(AC - BD)^2 = 0 \text{ adică } AC = BD.$$

De aici rezultă că paralelogramul cu diagonalele egale este dreptunghi.

Acest rezultat a fost obţinut ca urmare a aplicării incorecte a teoremei lui Ptolomeu, deoarece acesta se aplică doar într-un patrulater inscriptibil.

2. "Nu există triunghi echilateral"



Între măsurile a, b, c ale laturilor unui triunghi ABC există relaţiile:

$$a > b - c \qquad\qquad b > a - c$$

Scăzând aceste inegalităţi, parte cu parte, se obţine:

$$a - b > b - c - a + c$$

$$a - b > b - a$$

$$a + a > b + b$$

$$a > b$$

Deci, nu există triunghiuri echilaterale.

S-a obţinut acest rezultat deoarece s-au scăzut două inegalităţi.

2. "Sofismul lui Tean Bernoulli"

Tean Bernoulli a lăsat o demonstraţie a egalitaţii: $-1 = 1$.

Avem

$$(-1)^2 = 1 \text{ relaţie adevărată.}$$

Prin logaritmare în baza 10 se obţine:

$$\lg(-1)^2 = \lg 1$$

sau

$$2\lg(-1) = 0.$$

Împărţim cu $2 \neq 0$ şi obţinem

$$\lg(-1) = 0$$

sau

$$\lg(-1) = \lg 10^0$$

sau

$$(-1) = 10^0,$$

de unde

$$-1 = 1$$

Gresala provine din faptul că $\lg(-1)$ nu există.

O altă demonstraţie poate fi:

3′. Se pleacă de la identitatea: $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

Rezultă succesiv: $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$ sau

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

Se aplică proprietatea: "Într-o proporţie produsul mezilor este egal cu produsul extremilor", adică:

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)}$$

de unde rezultă

$$+1 = -1.$$

Greşeala provine din faptul că nu se respectă relaţia $\sqrt{a^2} = |a|$ şi $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dacă radicalii au sens.

4. Extragerea rădăcinii pătrate

Egalitatea $0,25$ lei=25 bani este adevărată.
Extrăgând rădăcina pătrată membru cu membru, ar trebui să rezulte tot o egalitate. Dar, observăm că:

$0,25$ lei $= 25$ bani.

$\sqrt{0,25}$ lei $= \sqrt{25}$ bani

$0,5$ lei $= 5$ bani, deci un leu are numai 10 bani, nu 100?

Greşeala: s-a extras radicalul numai din număr şi trebuia din toată expresia, adică: $\sqrt{0,25 \text{ lei}} = \sqrt{25 \text{ bani}}$.

5. Simplificări a) În fracţia $\frac{16}{64}$, dacă ştergem cifra 6 atât de la numărător, cât şi de la numitor, obţinem $\frac{1}{4}$.

Rezultatul este corect deoarece $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, prin simplificare cu 16.

b) În fracţia $\frac{26}{65}$, dacă ştergem cifra 6 obţinem $\frac{2}{5}$, care este un rezultat corect deoarece: $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$, prin simplificare cu 13.

c) În fracţia $\frac{(1+x)^2}{1-x^2}$, dacă ştergem exponentul 2 de la numărător şi de la numitor vom obţine: $\dfrac{(1+x)^2}{1-x^2} = \dfrac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1+x}{1-x}$, prin simplificare cu $(1+x)$.

În toate cele trei exemple, simplificarea s-a făcut eronat, nerespectând regulile obişnuite de simplificare, dar rezultatele sunt corecte.

Concluzia este că un raţionament greşit poate conduce la rezultate bune. De aceea se recomandă ca în rezolvarea problemelor de matematică, sa se urmărească corectitudinea nu numai a rezultatelor finale, ci şi a raţionamentelor prin care au fost obţinute aceste rezultate.

Bibliografie

[1] *Wikipedia*, Enciclopedie pentru tineret-Internet.

[2] *Astra Matematică*, Sibiu, 1990.

Grup Şcolar "Cpt. Nicolae Pleşoianu"
Rm. Vâlcea.