Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 85-92

În legătură cu o dublă inegalitate a lui Nicolae Ciorănescu [1]

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Cu ocazia împlinirii a 105 ani de la naşterea lui Nicolae Ciorănescu

Abstract

In this paper we present a proof for the inequality (1) and obtain some new generalizations.

2000 Mathematical Subject Classification: 51M16, 52A40

În Gazeta Matematică, vol XLIII(1937-1938) Nicolae Ciorănescu a propus problema 4993 cu următorul enunţ:

a, b, c fiind lunigmile laturilor unui triunghi ABC, atunci

$$\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2} \tag{1}$$

unde $2p$ este perimetrul triunghiului.

De menţionat că această problemă nu a fost rezolvată în Gazeta Matematică, ba mai mult, acest enunţ a fost reluat în Gazeta Matematică nr.8/1956, pag. 438 ca fiind problema 2315 şi apoi problema 7112 din Gazeta Matematică nr.8/1965 având acelaşi autor.

Noi ne propunem să generalizăm această problemă.

[1] *Received 15 September 2007*

Accepted for publication (in revised form) 20 November 2007

Propoziţia 1. *Dacă* $m, r \in \mathbb{R}_+, m + r, t, s, x_k \in \mathbb{R}_+^*$, *oricare ar fi* $k = \overline{1, n}, n \geq 3, s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ *astfel încât* $t \cdot s_n > s \cdot x_k$ *sau* $m \cdot s_n > r \cdot x_k$, *oricare ar fi* $k = \overline{1, n}$ *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} \geq \frac{(m \cdot n + r) \cdot n}{t \cdot n - s} \tag{2}$$

şi de asemenea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n - r \cdot x_k}{t \cdot s_n + s \cdot x_k} \geq \frac{(m \cdot n - r) \cdot n}{t \cdot n + s}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k}$ şi $B = \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n - r \cdot x_k}{t \cdot s_n + s \cdot x_k}$.
Prin urmare, $A + \frac{n \cdot r}{s} =$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} + \frac{r}{s} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(m \cdot s - r \cdot x_k)}{s(t \cdot s_n - s \cdot x_k)} =$$

$$= \frac{m \cdot s + t \cdot r}{(n \cdot t - s) \cdot s} \cdot (n \cdot t - s) \cdot s_n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} =$$

$$= \frac{m \cdot s + t \cdot r}{(n \cdot t - s) \cdot s} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (t \cdot s_n - s \cdot x_k) \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} \right) \geq$$

$$\geq \frac{(m \cdot s + t \cdot r) n^2}{(n \cdot t - s) \cdot s}$$

care este echivalent cu $A \geq \frac{(m \cdot s + t \cdot r) n^2}{n \cdot t - s} \cdot s - \frac{n \cdot r}{s} =$

$$= \frac{(m \cdot s + t \cdot r - r \cdot t) \cdot n^2 + r \cdot s \cdot n}{(t \cdot n - s) \cdot s} = \frac{m \cdot s \cdot n^2 + r \cdot s \cdot n}{s \cdot (t \cdot n - s)} = \frac{(m \cdot n + r) \cdot n}{t \cdot s - s}$$

ceea ce demostrează relaţia (2). De asemenea, avem:

$$B + \frac{n \cdot r}{s} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{m \cdot s_n - r \cdot x_k}{t \cdot s_n + s \cdot x_k} + \frac{r}{s} \right) = \frac{m \cdot s + t \cdot r}{s} \cdot s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t \cdot s_n + s \cdot x_k} =$$

$$\frac{m \cdot s + t \cdot r}{s \cdot (t \cdot n + s)} \cdot (t \cdot n + s) \cdot s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t \cdot s_n + s \cdot x_k} =$$

$$= \frac{m \cdot s + t \cdot r}{s \cdot (t \cdot n + s)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (t \cdot s_n + s \cdot x_k) \right) \cdot \left(\frac{1}{t \cdot s_n + s \cdot x_k} \right) \geq \frac{(m \cdot s + t \cdot r) \cdot n^2}{s \cdot (t \cdot n + s)}$$

care este echivalent cu

$$B \geq \frac{(m \cdot s + t \cdot r) \cdot n^2}{s(t \cdot n + s)} - \frac{n \cdot r}{s} = \frac{(m \cdot s + t \cdot r - t \cdot r) \cdot n^2 - s \cdot r \cdot n}{s \cdot (t \cdot n + s)}$$

$$= \frac{m \cdot s \cdot n^2 - r \cdot s \cdot n}{s \cdot (t \cdot n + s)} = \frac{(m \cdot n - r) \cdot n}{t \cdot n + s}$$

deci relaţia (3).

Observăm că $0 < x \leq y$, de unde rezultă că

$$\frac{x}{y} \leq \frac{x+z}{y+z} \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Într-adevăr, $x \leq y$ de unde $xz \leq yz$ echivalent cu $xy + xz \leq xy + yz$ echivalent cu $x \cdot (y+z) \leq y \cdot (x+z)$ echivalent cu $\frac{x}{y} \leq \frac{x+z}{y+z}$ ceea ce demonstrează relaţia (4).

Propoziţia 2. *Dacă $t \cdot s_n \geq (s+1)x_k$ oricare ar fi $k = \overline{1,n}$, atunci:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} < \frac{m \cdot n \cdot t + (m \cdot s + r \cdot t)(s+1)}{t^2}. \tag{5}$$

Demonstraţie. Avem:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k}$$

care este echivalent cu $t \cdot A = \sum_{k=1}^{n} \frac{t \cdot m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot (t \cdot s_n - s \cdot x_k) + (m \cdot s + r \cdot t) \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} =$$

$$= m \cdot n + (m \cdot s + r \cdot s) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k}. \tag{6}$$

Dacă în relaţia (4) înlocuim $x = x_k, y = t \cdot s_n - s \cdot x_k$ obţinem

$$(7) \qquad \frac{x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} < \frac{(s+1) \cdot x_k}{t \cdot s_n} \text{ oricare ar fi } k = \overline{1, n}$$

şi atunci relaţia (6) devine: $t \cdot A < m \cdot n + \dfrac{(m \cdot s + r \cdot t)}{t} \cdot (s+1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{s_n} =$
$= m \cdot n + \dfrac{(m \cdot s + r \cdot t)}{t} \cdot (s+1) \cdot \dfrac{s_n}{s_n} = m \cdot n + \dfrac{(m \cdot s + r \cdot t)(s+1)}{t}$ care este echivalent cu

$A < \dfrac{m \cdot n \cdot t + (m \cdot s + r \cdot t)(s+1)}{t^2}$ adică relaţia (5).

Relaţiile (2) şi (5) ne demonstrează că dacă $m, r \in \mathbb{R}_+, m + r, s, t, x_k \in \mathbb{R}_+^*, n \geq 3,\ s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ astfel încât $t \cdot s_n > (s+1) \cdot x_k$ oricare ar fi $k = \overline{1, n}$, atunci:

$$(8) \frac{(m \cdot n + r) \cdot n}{t \cdot n - s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot s_n + r \cdot x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} < \frac{m \cdot n \cdot t + (m \cdot s + r \cdot t)(s+1)}{t^2}.$$

Dacă în relaţia (8) considerăm în loc de m e $\dfrac{m}{2}$ şi $s_n = 2 \cdot p_n$ atunci obţinem:

$$\frac{(m \cdot n + 2 \cdot r) \cdot n}{2 \cdot (t \cdot n - s)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot p_n + r \cdot x_k}{2t \cdot p_n - s \cdot x_k} < \frac{m \cdot n \cdot t + (m \cdot s + 2r \cdot t)(s+1)}{2 \cdot t^2},$$
(9)

din care pentru $t = s - 1$ rezultă:

$$(10) \quad \frac{(m \cdot n + 2 \cdot r) \cdot n}{2 \cdot (n-1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot p_n + r \cdot x_k}{2p_n - x_k} < \frac{m \cdot n + 2 \cdot (m + 2r)}{2}.$$

De asemenea, făcând în relaţia (10) pe $r = 1$ obţinem

$$(11) \qquad \frac{(m \cdot n + 2) \cdot n}{2 \cdot (n-1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot p_n + x_k}{2p_n - x_k} < \frac{m \cdot n + 2 \cdot (m+2)}{2}.$$

1 Aplicaţii

Aplicaţia 1. *Dacă* $n = 3$ *relaţia (11) devine*

$$\frac{(3m+2)\cdot 3}{4} \le \sum_{k=1}^{3} \frac{m\cdot p_3 + x_k}{2p_3 - x_k} < \frac{5m+4}{2}. \tag{12}$$

în care considerăm $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ *unde* a, b, c *sunt lungimile laturilor unui triunghi de perimetru* $2p$ *şi obţinem:*

$$\frac{3\cdot(3m+2)}{4} \le \frac{m\cdot p + a}{b+c} + \frac{m\cdot p + b}{c+a} + \frac{m\cdot p + c}{a+b} < \frac{5m+4}{2}, \tag{13}$$

adică primele două relaţii din problema 22 678, Gazeta Matematică nr 8/1992, pag. 285 din care pentru $m = 1$ *se deduce că:*

$$\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}, \tag{14}$$

adică relaţia din problema lui Nicolae Ciorănescu.

Aplicaţia 2. *Dacă in relaţia (10) înlocuim* $m = 1$*, apoi pe* $r = m \in \mathbb{R}_+^*$*, obţinem:*

$$\frac{(2m\cdot n)\cdot n}{2\cdot(n-1)} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{p_n + m\cdot x_k}{2p_n - x_k} < \frac{n + 2\cdot(m+1)}{2}. \tag{15}$$

Dacă $n = 3$ *relaţia (15) devine:*

$$\frac{3\cdot(2m\cdot 3)}{4} \le \sum_{k=1}^{3} \frac{p_3 + m\cdot x_k}{2p_3 - x_k} < \frac{4m+5)}{2}. \tag{16}$$

în care considerăm $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ *unde* a, b, c *sunt lungimile laturilor unui triunghi* ABC *de perimetru* $2p$ *şi obţinem:*

$$\frac{3\cdot(2m+3)}{4} \le \frac{p + m\cdot a}{b+c} + \frac{p + m\cdot b}{c+a} + \frac{p + m\cdot c}{a+b} < \frac{4m+5}{2}, \tag{17}$$

adică ultimele două relaţii din problema 22 678, Gazeta Matematică nr 8/1992, pag. 285 din care pentru $m = 1$ *se obţine:*

$$\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}, \tag{18}$$

adică din nou am obţinut relaţia din problema lui Nicolae Ciorănescu.

Aplicaţia 3. *Dacă în relaţia (8) considerăm $m = 0$ şi $r = 1$ obţinem:*

$$\frac{n}{t \cdot n - s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{t \cdot s_n - s \cdot x_k} < \frac{s+1}{t}. \tag{19}$$

de unde pentru $t = 2$ şi $s = 1$ rezultă:

$$\frac{n}{2n-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2s_n - x_k} < 1. \tag{20}$$

Dacă în relaţia (20) considerăm $s_n = 1$, atunci:

$$\frac{n}{2n-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2 - x_k} < 1, \tag{21}$$

adică am obţinut inegalităţile propuse de Grecia la Prima Olimpiadă Balcanică, Atena, 6-10 Mai 1984.

Aplicaţia 4. *Să observăm că:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+1) \cdot s_n - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot x_k}{(n+1) \cdot s_n - n \cdot x_k}, \tag{22}$$

iar dacă în relaţia (2) înlocuim $m = 0, r = n, t = n+1, s = n$ rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot x_k}{(n+1) \cdot s_n - n \cdot x_k} \geq \frac{n^2}{(n+1) \cdot n - n} = 1, \tag{23}$$

adică am obţinut problema 0:1179 propusă de D. M. Bătineţu-Giurgiu în Gazeta Matematică nr.12/2007, pag.667.

Aplicaţia 5. *Problema 17 666 din Gazeta Matematică nr.3/1979, pag.111 de Florin Pârvănescu. Dacă în relaţia (3) facem $m = r = t = s = 1$ obţinem:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_n \cdot x_k}{s_n + x_k} \geq \frac{n \cdot (n-1)}{n+1}, \tag{24}$$

Deci problema 17 666 din Gazeta Matematică.

Aplicaţia 6. *Problema C:2155 din Gazeta Matematică nr.4/1999, pag.187 de Dan Popescu.*

Dacă $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ *oricare ar fi* $k = \overline{1,n}, n \geq 2$ *şi dacă* $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, g_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$, *atunci:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{s_n + g_n - x_k} \geq 1. \tag{25}$$

Într-adevăr, considerând media aritmetică a numerelor $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$, *adică* $A_n = \frac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} = g_n$

atunci avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{s_n + g_n - x_k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{s_n + A_n - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot x_k}{(n+1) \cdot A_n + n \cdot x_k} \tag{26}$$

şi deci făcând în inegalitatea (2), $m = 0, r = n, t = n+1, s = n$ *obţinem:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot x_k}{(n+1) \cdot A_n - n \cdot x_k} \geq \frac{n^2}{(n+1) \cdot n - n} = 1. \tag{27}$$

Inegalitătile (26) şi (27) ne demonstrează inegalitatea (25).

Aplicaţia 7. *Dacă* $n = 3$ *atunci inegalitatea (3) devine:*

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{m \cdot s_3 - r \cdot x_k}{t \cdot s_3 + s \cdot x_k} \geq \frac{3 \cdot (3m - r)}{3t + s}. \tag{28}$$

În inegalitatea (28) luăm $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, m = 1, r = 1, t = 1, s = u - 1$ *unde* $u > 1$ *şi obţinem:*

$$\frac{b+c}{ua+b+c} + \frac{c+a}{a+ub+c} + \frac{a+b}{a+b+uc} \geq \frac{6}{u+2}, \tag{29}$$

adică problema E:9897 din Gazeta Matematică nr. 12/1989, pag. 464 autor Alexandru Szörös.

Aplicaţia 8. *Dacă* $n = 3$ *atunci inegalitatea devine (2) devine:*

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{m \cdot s_3 + r \cdot x_k}{t \cdot s_3 - s \cdot x_k} \geq \frac{(3m + r) \cdot 3}{3t - s}. \tag{30}$$

În (30) facem $m = r = t = s = 1$ şi obţinem notând $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ că:

$$\frac{2a+b+c}{b+c} + \frac{a+2b+c}{c+a} + \frac{b+a+2c}{a+b} \geq 6, \tag{31}$$

care constituie subiectul unei inegalităţi din Gazeta Matematică nr. 12/1980, pag. 488.

Aplicaţia 9. *Dacă în relaţia (30) facem $m = 0, r = t = s = 1$ obţinem:*

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{x_k}{s_3 - x_k} \geq \frac{3}{2}. \tag{32}$$

în care facem $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, a+b+c = 2p$ unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC şi obţinem:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{a}{2p-a} + \frac{b}{2p-b} + \frac{c}{2p-c} \geq \frac{3}{2}. \tag{33}$$

adică problema 16966 din Gazeta Matematică nr. 12/1977, pag. 505 autor C. C. Nistorescu.

Aplicaţia 10. *În relaţia (2) facem $m = 0, r = 1, t = s = 1$ şi obţinem:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{s_n - x_k} \geq \frac{n}{n-1}. \tag{34}$$

care face parte din problemele date la Olimpiada de Matematică din R. D. G., anul 1981(a se vedea Gazeta Matematică nr. 12/1981, pag. 448).

Bibliografie

[1] Colecţia *Gazeta Matematică*

Colegiul Naţional "M. Basarab" - Bucureşti
str. Matei Basarab, nr.32, sector 3
Bucureşti - România
E-mail:cnmb@basarab.ro