Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 29-31

Generalizarea unui determinant [1]

Dumitru Barac

Abstract

In this paper we compute the determinant of a $n\times n$ matrix which generalizes the matrices $D^{(4)}$ and $D^{(5)}$ from below, applying an idea used for Vandermonde determinant.

2000 Mathematical Subject Classification: 15A15

În [1] şi [2] se cere calculul determinanţilor matricelor următoare:

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1\\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1\\ a & 2a+1 & a+2 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$D^{(5)}=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a & 1\\ a^3 & a^3+3a^2 & 3a^2+3a & 3a+1 & 1\\ a^2 & 2a^2+2a & a^2+4a+1 & 2a+2 & 1\\ a & 3a+1 & 3a+3 & a+3 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

[1] *Received 18 May 2007*

Accepted for publication (in revised form) 19 August 2007

Menţionăm că ele se află şi în culegerile [3] şi [4], chiar cu o uşoară generalizare. Matricea $D^{(n)}$ de ordinul n are pe linia i şi coloana j elementul

$$d_{ij}^{(n)} = \sum_k C_{i-1}^k C_{n-i}^{j+k-i} a^{n-k-j},$$

unde $\max\{0, i-j\} \le k \le \min\{i-1, n-j\}$. În cele ce urmează convenim că $C_p^q = 0$ dacă $p \ge 0, q \in \mathbf{Z}$ cu $p \ge 0, q < 0$ sau $p < q$, motiv pentru care în formula precedentă am renunţat la scrierea mulţimii valorilor pe care le ia indicele k. Vom mai folosi formula de recurenţă

$$C_p^q = C_{p-1}^q + C_{p-1}^{q-1},$$

valabilă, cu convenţia precedentă, pentru orice $p, q \in \mathbf{Z}$, $p \ge 1$.

Pentru calculul lui $\det(D^{(n)})$ stabilim relaţia de recurenţă

$$\det(D^{(n)}) = (a-1)^{n-1} \det(D^{(n-1)}),$$

aplicând o idee folosită la calculul determinantului Vandermonde: pentru $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ adunăm la linia i linia $i+1$ înmulţită cu $-a$. Avem

$$d_{i,j}^{(n)} - a \cdot d_{i+1,j}^{(n)} = \sum_k C_{i-1}^k C_{n-i}^{j+k-i} a^{n-k-j} - a \sum_l C_i^l C_{n-i-1}^{j+l-i-1} a^{n-l-j}.$$

Introducem în a doua sumă schimbarea de indice $l := k+1$ şi avem

$$d_{i,j}^{(n)} - a \cdot d_{i+1,j}^{(n)} = \sum_k C_{i-1}^k C_{n-i}^{j+k-i} a^{n-k-j} - \sum_k C_i^{k+1} C_{n-i-1}^{j+k-i} a^{n-k-j} =$$

$$= \sum_k C_{i-1}^k (C_{n-i-1}^{j+k-i} + C_{n-i-1}^{j+k-i-1}) a^{n-k-j} - \sum_k (C_{i-1}^{k+1} + C_{i-1}^k) C_{n-i-1}^{j+k-i} a^{n-k-j}.$$

După reducerea termenilor asemenea, introducem în a doua sumă schimbarea de indice $k := k-1$, se dă factor comun şi se obţine, pentru $j > 1$,

$$d_{i,j}^{(n)} - a \cdot d_{i+1,j}^{(n)} = (1-a) \sum_k C_{i-1}^k C_{(n-1)-i}^{(j-1)+k-i} = (1-a) d_{i,j-1}^{(n-1)}.$$

Întrucât $d_{i,1}^{(n)} - a \cdot d_{i+1,1}^{(n)} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$ şi $d_{n,1}^{(n)} = 1$, se dezvoltă după coloana 1 şi se obţine

$$\det(D^{(n)}) = (1-a)^{n-1}(-1)^{n+1} \det(D^{(n-1)}),$$

adică relaţia de recurenţă dorită. Aplicând repetat această relaţie de recurenţă şi ţinând cont că $\det(D^{(1)}) = 1$, se obţine, în final

$$\det(D^{(n)}) = (a-1)^{n-1}(a-1)^{n-2} \cdots (a-1)^2(a-1) = (a-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

În cazurile particulare amintite avem $\det(D^{(4)}) = (a-1)^6$ şi $\det(D^{(5)}) = (a-1)^{10}$.

Bibliografie

[1] Teler M. *Problema 23949*, G.M. nr. 7-8/1998, pag. 319.

[2] Năstăsescu C., Niţă C., Stănescu I. *Matematică. Elemente de algebră superioară. Manual pentru clasa a XI-a*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti. 1981, pag. 39, problema 11 d).

[3] Stamate I., Stoian I. *Culegere de exerciţii şi probleme de algebră*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti. 1979, problemele 9.96 şi 9.106.

[4] Coşniţă C., Turtoiu F. *Probleme de algebră*, Ed. tehnică, Bucureşti. 1989, pag. 341, problemele 46 şi 47, pag. 346, problema 74.

Universitatea ”Lucian Blaga” din Sibiu
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I. Raţiu, nr. 5-7
550012 Sibiu, România