Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 103 - 106

O inegalitate interesantă [1]

Dumitru Acu

Abstract

In this paper we obtain an interesting generalization for the inequalities (1) and (2).

2000 Mathematical Subject Classification: 26D07

1. Este cunoscută în literatura matematică inegalitatea

$$\frac{1+x^2}{x} \geq 2, \tag{1}$$

adevărată pentru orice $x > 0$. Egalitatea are loc pentru $x = 1$.

În [1] se demonstrează că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{1+x^2+x^4}{x+x^3} \geq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

În această scurtă lucrare ne propunem să generalizăm (1) şi (2), iar apoi să prezentăm o formă a acestor inegalităţi pentru două numere reale pozitive.

2. Pentru a obţine generalizarea este suficient să observăm că (1) se scrie sub forma

$$\frac{1+x^2}{x} \geq \frac{2}{1}.$$

Acum (1) şi (2) ne sugerează inegalitatea generală.

[1] *Received 18 May 2007*

Accepted for publication (in revised form) 20 October 2007

Teorema 2.1. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x > 0$ are loc inegalitatea:*

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}{x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}} \geq \frac{n+1}{n}, \tag{3}$$

cu egalitatea pentru $x = 1$.

Demonstraţie. Vom utiliza inducţia matematică.

Pentru $n = 1$ inegalitatea (3) devine (1), care este echivalentă cu $(1 - x)^2 \geq 0$, inegalitate evidentă. Egalitatea are loc pentru $x = 1$.

Să admitem că (3) are loc pentru n şi să demonstrăm că are loc şi pentru $n + 1$, adică este adevărată inegalitatea

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n+2}}{x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n+1}} \geq \frac{n+2}{n+1}. \tag{4}$$

Inegalitatea (4) se scrie şi sub forma

$$(n+1)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n})+(n+1)x^{2n+2} \geq (n+2)(x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n+1})$$

sau

$$n(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}) + 1 + x^2 + \ldots + x^{2n} + (n+1)x^{2n+2} \geq \tag{5}$$

$$\geq (n+1)(x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1})+x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1}+(n+2)x^{2n+1}.$$

Acum din (3) avem

$$n(1 + x^2 + \ldots + x^{2n}) \geq (n+1)(x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}).$$

Utilizând această inegalitate, din (5) obţinem

$$(n+1)x^{2n+2} + 1 + x^2 + \ldots + x^{2n} \geq x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} + (n+2)x^{2n+1}$$

sau

$$(n+1)x^{2n+2}(x-1)+x^{2n}+x^{2n-2}+\ldots+x^2+1-x^{2n+1}-x^{2n-1}-\ldots-x^3-x \geq 0$$

sau

$$(n+1)x^{2n+1}(x-1)-x^{2n}(n-1)-x^{2n-2}(x-1)-\ldots-x^2(x-1)-(x-1) \geq 0$$

sau

$$(x-1)[(n+1)x^{2n+1} - x^{2n} - x^{2n-2} - x^{2n-4} - \ldots - x^2 - 1] \geq 0$$

sau

$$(x-1)[x^{2n}(x-1) + x^{2n-2}(x^3-1) + x^{2n-4}(x^5-1) + \ldots + x^2(x^{2n-1}-1) +$$
$$+ x^{2n+1} - 1] \geq 0$$

sau

$$(x-1)^2[x^{2n} + x^{2n-2}(x^2+x+1) + x^{2n-4}(x^4+x^3+x^2+x+1) + \ldots +$$
$$+ x^2(x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x + 1) + x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x + 1] \geq 0,$$

inegalitate evidentă pentru $x > 0$.

Egalitatea este atinsă pentru $x = 1$.

Aşadar, inegalitatea (3) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice x real pozitiv.

Observaţie. *Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ din (3) rezultă inegalităţile (1) şi respectiv (2).*

3. Dacă în (1) punem $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ a, b numere reale pozitive, atunci obţinem

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

cunoscuta inegalitate dintre media aritmetică a două numere şi media geometrică a aceloraşi numere.

Dacă în (2) punem $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a > 0, b > 0$, găsim

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}\sqrt{ab},$$

cu egalitate pentru $a = b$.

Punând $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a > 0, b > 0$, în (3) obţinem inegalitatea interesantă

$$\frac{a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}} \geq \frac{n+1}{n}\sqrt{ab},$$

cu egalitate pentru $a = b$.

Bibliografie

[1] L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu, *Inegalităţi* , Editura GIL, Zalău, 1995, Problema 1.47, p.5

Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I. Raţiu, nr. 5–7
550012 Sibiu - Romania
E-mail: acu_dumitru@yahoo.com