Educaţia Matematică Vol. 3, Nr. 1-2 (2007), 57 - 59

Asupra unei probleme de divizibilitate [1]

Dumitru Acu

Abstract

In this short paper we prove the number p^n, p-prime number, is not divide on the number $((p-1)n)!$ and the number p^{n-1} divides the number $((p-1)n)!$ for the number $n = p^k,\ k = 1, 2, \ldots$.

2000 Mathematical Subject Classification: 11A41, 97D50

In [1], Problema 25, Capitolul 4 se arată că numărul $2^n, n \in \mathbb{N}^*$, nu divide pe 2^n şi că numerele naturale n pentru care 2^{n-1} divide pe $n!$ sunt de forma $n = 2^k,\ k = 1, 2, \ldots$.

În această scurtă lucrare vom generaliza aceste rezultate.

Rezultatele obţinute sunt cuprinse în teorema ce urmează.

Teorema 1. *Fie p un număr prim dat.*

i) Numărul p^n nu divide pe numărul $((p-1)n)!$, oricare ar fi numărul n natural nenul.

ii) Numerele naturale n pentru care p^{n-1} divide numărul $((p-1)n)!$ sunt $n = p^k,\ k = 1, 2, \ldots$.

Demonstraţie. Ideea demonstraţiei este analoagă cu cea din [1].

i) Fie $k \in \mathbb{N}$ aşa încât $p^k \leq (p-1)n < p^{k+1}$. Exponentul $e_p((p-1)n)$ al lui p în $((p-1)n)!$ este

$$(1)\qquad e_p((p-1)n) = \left[\frac{n(p-1)}{p}\right] + \left[\frac{n(p-1)}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n(p-1)}{p^k}\right],$$

[1] *Received 12 July 2007*

Accepted for publication (in revised form) 18 October 2007

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots k$ avem

$$\left[\frac{n(p-1)}{p^i}\right] = \frac{n(p-1)}{p^i} - \alpha_i, \alpha_i \in [0,1). \tag{2}$$

Presupunem că p^n divide numărul $((p-1)n)!$. Atunci avem

$$e_p((p-1)n) = n + \beta,\ \beta \geq 0. \tag{3}$$

Acum, din (1) şi (2) obţinem

$$e_p((p-1)n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n(p-1)}{p^i} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i =$$

$$n(p-1) \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^k}}{1 - \frac{1}{p}} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n(1 - \frac{1}{p^k}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

Înlocuind acest rezultat în (3), găsim:

$$n - \frac{n}{p^k} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n + \beta,$$

de unde

$$\frac{n}{p^k} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \beta = 0.$$

Ultima egalitate este imposibilă deoarece toate numerele din membrul întâi sunt nenegative iar $\dfrac{n}{p^k} > 0$. Contradicţia ne arată că presupunerea făcută este falsă. Deci, numărul p^n nu divide pe $((p-1)n)!$

ii) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care p^{n-1} divide numărul $((p-1)n)!$.

Din cele de mai sus rezultă că trebuie să avem

$$e_p((p-1)n) = n(1 - \frac{1}{p^k}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n - 1 + \beta,\ \beta \geq 0, \alpha_i \in [0,1).$$

De aici rezultă că $1 = \dfrac{n}{p^k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \beta$, care este posibilă numai dacă $\alpha_i = 0, i = \overline{1,k},\ \beta = 0$ şi $n = p^k$.

Aşadar, pentru numerele $n = p^k,\ k = 1, 2, \ldots$ numărul p^{n-1} divide pe numărul $((p-1)n)!$.

Observaţii. 1. *Pentru $n = 2$ deducem că numărul 2^n nu divide pe $n!$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi că numerele n pentru care 2^{n-1} divide pe $n!$ sunt de forma $n = 2^k, k = 1, 2, \ldots$.*

Aceste rezultate sunt cele din [1].

2. *Pentru $p = 3$ deducem că numărul 3^n nu divide numărul $(2n)!$, oricare ar fi numărul natural nenul n şi că numărul 3^{n-1} divide pe $(2n)!$ pentru numerele de forma $n = 3^k,\ k = 1, 2, \ldots$.*

Bibliografie

[1] L. Panaitopol, Alex. Ghica, *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Idei şi metode de rezolvare* , Editura GIL, Zalău, 2006

Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu
Facultatea de Ştiinţe
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I. Raţiu, nr. 5–7
550012 Sibiu - Romania
E-mail: acu_dumitru@yahoo.com