Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 73-77

Asupra unor ecuaţii diofantiene cu factoriale [1]

Diana Tiţoiu

Abstract

In this article we presents the results of some diophantine equation with factorials. In [3] the authors study the diophantine equation with factorials: $x!+y!+z! = 2^{v!}$ (problems 31 of page 51). This equation has the solutions: $(x, y, z, v) \in \{(1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 1, 2)\}$. In this paper we want to study other similar types of diophantine equations.

2000 Mathematics Subject Classification:11D04

1. Ecuaţia de tipul: $x! + y! = 2^u$.

Dacă $u = 0$ atunci $x! + y! = 1$, ceea ce este imposibil, deoarece $x! \geq 1, y! \geq 1$. Fie $u \geq 1$; atunci presupunem $x \geq y$ şi avem $y! \cdot [(y+1)...x+1] = 2^u$.

Dacă $y \geq 3$ este imposibil pentru că $y!$ se divide cu 3, iar partea dreaptă 2^u nu se divide cu 3.

Dacă $y = 0$ şi $y = 1$ atunci $x! + 1 = 2^u$, de unde $x! = 2^u - 1$.

Pentru $x \geq 2$ este imposibil, deoarece $x!$ se divide cu 2, iar partea dreaptă nu se divide cu 2.

Pentru $x = 0, x = 1$ rezultă $1 = 2^u - 1$, adică $2^u = 2$ de unde $u = 1$.

[1] *Received 17 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 20 May, 2006

Dacă $y = 2$ atunci $x! = 2^u - 2$. Pentru $x \geq 4$ egalitatea este imposibilă, deoarece partea dreaptă nu se divide cu 4.Pentru $x = 0, x = 1$ rezultă $1 = 2^u - 2$, adică $2^u = 3$ ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $x = 2$ rezultă $2 = 2^u - 2$ adică $2^u = 4$, de unde $u = 2$.

Pentru $x = 3$ rezultă $6 = 2^u - 2$ adică $2^u = 8$, de unde $u = 3$.

Prin urmare, ecuaţia $x! + y! = 2^u$ admite soluţiile:
$(x, y, z) \in \{(0, 0, 1); (1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 2, 3), (2, 3, 3)\}$.

2. Ecuaţia de tipul : $x! + y! = 3^u$.

Dacă $u = 0$ atunci $x! + y! = 1$ este imposibil deoarece $x! \geq 1$, $y! \geq 1$.

Fie $u \geq 1$; atunci presupunem $x \geq y$ şi avem $z! \cdot [(y + 1)...x + 1] = 3^u$.

Dacă $y \geq 4$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 4.

Dacă $y = 0$, atunci $x! + 1 = 3^u$, de unde $x! = 3^u - 1$. Pentru $x \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3.

Pentru $x = 0, x = 1$ rezultă $1 = 3^u - 1$, adică $3^u = 2$ ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $x = 2$ rezultă $2 = 3^u - 1$ adică $3^u = 3$, de unde $u = 1$. Dacă $y = 2$, atunci $x! = 3^u - 2$.

Pentru $x \geq 2$ este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 2.

Pentru $x = 0, x = 1$ rezultă $1 = 3^u - 2$, adică $3^u = 3$, de unde $u = 1$.

Dacă $y = 3$, atunci $x! = 3^u - 6$. Pentru $x \geq 4$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 4.

Pentru $x = 0, x = 1$ rezultă $1 = 3^u - 6$, adică $3^u = 7$, ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $x = 2$ rezultă $2 = 3^u - 6$ adică $3^u = 8$ ceea ce este imposibil în numere naturale.

Pentru $x = 3$ rezultă $6 = 3^u - 6$ adică $3^u = 12$ ceea ce este imposibil în numere naturale.

Prin urmare, ecuaţia $x!+y! = 3^u$ are soluţiile:$(x, y, u) \in \{(2, 0, 1); (2, 1, 1); (0, 2, 1); (1, 2, 1)\}$.

3. Ecuaţia de tipul: $x! + y! = 4^u$.

Dacă $u = 0$, atunci $x! + y! = 1$ este imposibil deoarece $x! \geq 1, y! \geq 1$.

Dacă $u \geq 1$, atunci presupunem că $x \geq y$, de unde $y![(y+1)...x+1] = 4^u$.

Pentru $y \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3.

Dacă $y = 0, y = 1$, atunci $x! + 1 = 4^u$, de unde $x! = 4^u - 1$.

Pentru $x \geq 2$ este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 2.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 4^u - 1$ şi atunci $4^u = 2$, ceea ce este $2^{2u} = 2$, de unde $u = \frac{1}{2}$, dar $u \in \mathbb{N}$.

Dacă $y = 2$, atunci $x! + 2 = 4^u$, de unde $x! = 4^u - 2$.

Pentru $x \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 4^u - 2$ şi atunci $4^u = 2$, de unde $4^u = 3$ care este imposibil în numere naturale.

Pentru $x = 2$ avem $2 = 4^u - 2$ ceea ce este $4^u = 4$, de unde $u = 1$.

Prin urmare, ecuaţia $x! + y! = 4^u$ *are soluţia:* $(x, y, u) = (2, 2, 1)$.

4. Ecuaţia de tipul: $x! + y! = 5^u$.

Dacă $u = 0$, atunci $x!+y! = 1$ care este imposibil deoarece $x! \geq 1, y! \geq 1$.

Dacă $u \geq 2$ presupunem $x \geq y$ şi atunci $y![(y + 1)...x + 1] = 5^u$.

Pentru $y \geq 2$ este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 2.

Dacă $y = 0, y = 1$, atunci $x! + 1 = 5^u$, de unde $x! = 5^u - 1$.

Dacă $x \geq 5$, este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 5.

Dacă $x = 0, x = 1$, atunci avem $5^u = 2$, ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Dacă $x = 2$, atunci $5^u = 3$ ceea ce este imposibil în numere naturale.

Dacă $x = 3$, atunci $5^u = 7$ ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Dacă $x = 4$, atunci avem $5^u = 25$ sau $5^u = 5^2$, de unde $u = 2$.

Prin urmare, pentru ecuaţia $x!+y! = 5^u$ *are următoarele soluţii:*$(x, y, u) \in \{(4, 0, 2), (4, 1, 2), (0, 4, 2), (1, 4, 2)\}$.

5. Ecuaţia de tipul : $x! + y! + z! = 3^u$**.**

Dacă $u = 0$, atunci $x! + y! + z! = 1$ este imposibil deoarece $x! \geq 1, y! \geq 1, z! \geq 1$.

Dacă $u \geq 1$, atunci presupunem $x \geq y \geq z$, de unde $z![x(x - 1)...(z + 1) + y(y + 1) + 1] = 3^u$.

Dacă $z \geq 2$, atunci este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 2.

Dacă $z = 0, z = 1$, atunci $x! + y! = 3^u - 1$ sau $y![x(x-1)...(y+1)+1] = 3^u - 1$.

Dacă $y \geq 3$, este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3.

Dacă $y = 0, y = 1$, atunci $x! + 1 = 3^u - 1$, de unde $x! = 3^u - 2$.

Pentru $x \geq 2$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 2.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 3^u - 2$ sau $3^u = 3$, de unde $u = 1$.

Dacă $y = 2$, atunci $x! + 2 = 3^u - 1$, de unde $x! = 3^u - 3$.

Pentru $x \geq 4$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 4.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 3^u - 3$, de unde $3^u = 4$ ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $x = 2$ avem $2 = 3^u - 3$ de unde $3^u = 5$, ceea ce este imposibil în numere naturale.

Pentru $x = 3$ avem $6 = 3^u - 3$ sau $3^u = 9$, de unde $u = 2$.

Prin urmare, ecuaţia $x! + y! + z! = 3^u$ *are următoarele soluţii:*
$(x, y, z, u) \in \{(0,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,1), (3,2,0,2), (3,0,2,2), (2,3,0,2), (2,0,3,2), (0,3,2,2), (0,2,3,2), (3,1,2,2), (2,3,1,2), (1,3,2,2), (2,1,3,2), (1,2,3,2), (3,2,1,2)\}$.

6. Ecuaţia de tipul: $x! + y! + z! = 4^u$.

Dacă $u = 0$, atunci $x! + y! + z! = 1$ este imposibil pentru că $x! \geq 1, y! \geq 1, z! \geq 1$.

Dacă $u \geq 1$, atunci presupunem $x \geq y \geq z$ şi avem $z![x(x-1)...(z+1) + y(y+1)...(z+1)+1] = 4^u$. Dacă $z \geq 3$, este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 3.

Dacă $z = 0, z = 1$, atunci $x! + y! = 4^u - 1$ sau $y![x(x-1)...(y+1)+1] = 4^u - 1$.

Dacă $y \geq 2$, este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 2.

Dacă $y = 0, y = 1$, atunci $x! + 1 = 4^u - 1$, de unde $x! = 4^u - 2$.

Pentru $x \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3. Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 4^u - 2$ sau $4^u = 3$, ceea ce este imposibil în numere naturale.

Pentru $x = 2$ avem $2 = 4^u - 2$ care este echivalentă cu $4^u = 4$, de unde $u = 1$.

Dacă $z = 2$, atunci $x! + y1 = 4^u - 2$ sau $y![x(x-1)...(y+1)+1] = 4^u - 2$.

Pentru $y \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3,deci $y = 0, y = 1, y = 2$.

Dacă $y = 0, y = 1$, atunci $x! = 1 = 4^u - 2$, de unde $x! = 4^u - 3$.

Pentru $x \geq 2$ este imposibil deoarece partea dreaptă nu se divide cu 2.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 4^u - 3$ ceea ce este echivalent cu $4^u = 4$ de unde $u = 1$.

Dacă $y = 2$, atunci $x! + 2 = 4^u - 2$, de unde $x! = 4^u - 4$.

Pentru $x \geq 3$ este imposibil pentru că partea dreaptă nu se divide cu 3.

Pentru $x = 0, x = 1$ avem $1 = 4^u - 4$, de unde $4^u = 5$, ceea ce este imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $x = 2$ avem $2 = 4^u - 4$, de unde $4^u = 6$, ceea ce este imposibil în numere naturale.

Prin urmare, ecuaţia $x! + y! + z! = 4^u$ are următoarele soluţii:
$(x, y, z, u) \in \{(2, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1),$
$(0, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 1),$
$(1, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1)\}$.

Bibliografie

[1] Acu, D., *Aritmetica şi teoria numerelor*, Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu , Colecţia Departamentului de Matematică, Seria Matematică, Sibiu 1999.

[2] Andreescu, T., *O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene*, Editura Gil, Zalău, 2003.

[3] Andreescu, T., Andrica, D., *360 Problems for Mathematical Contests*, Editura Gil, Zalău, 2003.