Educaţia Matematică Vol.2 , Nr. 1-2 (2006), 21-27

Derivata unui determinant [1]

Alina Maria Tintea

Abstract

In this paper we propose to study some problems with the derivative of a determinant and we propose some generalization of them.

2000 Mathematical Subject Classification: 26A24

În lucrarea [3] este prezentat următorul rezultat, util deseori în rezolvarea problemelor cu determinanţi.

Teoremă 1. *Fie $f_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, iar $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

Atunci $F(x)$ este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$(1) \quad F'(x) = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{j1}(x) & f'_{j2}(x) & \dots & f'_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}, \ \textit{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}$$

[1] *Received 19, May 2006*
Accepted for publication (in revised form) 25 May, 2006

Demonstraţie. Funcţia $F(x)$ este funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$, ea fiind obţinută prin operaţii elementare din funcţiile $f_{ij}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ care sunt funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$.

Demonstrăm acum relaţia (1). Avem

$$F(x) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) f_{1\varphi(1)}(x) \cdot f_{2\varphi(2)}(x) \cdot \ldots \cdot f_{n\varphi(n)}(x), \tag{2}$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Derivăm această relaţie şi obţinem

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) f_{1\varphi(1)}(x) \cdot f_{2\varphi(2)}(x) \cdot \ldots \cdot f_{n\varphi(n)}(x) \ ,$$

adică tocmai relaţia (1).

Aplicaţii.

1. *Să se demonstreze că*

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta, \gamma, a, b, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} .$$

Evident f este derivabilă şi conform Teoremei 1 putem scrie:

$$\begin{aligned} f'(x) \ &= \begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ . \end{aligned}$$

Cum $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x)$ este constantă pe $\mathbb{R}$ şi deci $f(x) = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} .$$

Observaţie. Pentru această problemă propunem următoarea generalizare:
Să se demonstreze că valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \sin(x+a_1) & \sin(x+a_2) & \ldots & \sin(x+a_n) \\ \cos(x+a_1) & \cos(x+a_2) & \ldots & \cos(x+a_n) \\ b_{31} & b_{32} & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

nu depinde de x $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *şi* $b_{ij} \in \mathbb{R},\ i = \overline{3,n},\ j = \overline{1,n})$.

2.*Să se demonstreze că* $x = 1$ *este rădăcina triplă pentru polinomul:*

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} .$$

Rezolvare. Polinomul $f(x)$ are soluţie triplă $x = 1$ dacă $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$. Avem

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Conform Teoremei 1, deoarece f este derivabilă putem scrie

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} .$$

Deci,

$$f'(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} \overset{l_2 \pm l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

având liniile 1 şi 3 egale. Deoarece

$$f''(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

rezultă că

$$f''(1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} \ .$$

Scădem coloana 1 din celelalte coloane şi obţinem

$$f''(1) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

deoarece coloana a doua este suma celorlalte două coloane.

Cum $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ rezultă că $f(x)$ este de forma $a(x-1)^3$, $a \in \mathbb{R}$.

Observaţie. Pentru această problemă propunem următoarea generalizare:

Să se demonstreze că $x = 1$ este rădăcină de ordinul $n-1$ pentru polinomul

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n \\ 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \ldots & n^{n-2} \end{vmatrix} \ ,$$

unde n este un număr natural, $n \geq 2$.

3. Fie $x, a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Să se arate că

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} x + 1 \right) .$$

Rezolvare. Derivând de două ori funcţia Δ, avem

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} ,$$

$$\Delta''(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Deci $\Delta''(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că există $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Delta(x) = \Delta_1 \cdot x + \Delta_2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. De asemenea, avem

$$\Delta_2 = \Delta(0) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\ ,$$

iar

$$\Delta_1 = \Delta'(0) = a_2a_3\dots a_n + a_1a_3\dots a_n + \dots + a_1a_2\dots a_{n-1} =$$

$$= \frac{a_1a_2a_3\dots a_n}{a_1} + \frac{a_1a_2a_3\dots a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_1a_2a_3\dots a_n}{a_n} =$$

$$= a_1a_2a_3\dots a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = a_1a_2a_3\dots a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ .$$

Deci,

$$\Delta(x) = a_1a_2\dots a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot x + a_1a_2\dots a_n = a_1a_2\dots a_n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot x + 1\right)\ .$$

4. *Fie polinoamele $P,\ Q,\ R,\ S$ de grad ≤ 4. Să se arate că polinomul*

$$T(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) & S(x) \\ P'(x) & Q'(x) & R'(x) & S'(x) \\ P''(x) & Q''(x) & R''(x) & S''(x) \\ P'''(x) & Q'''(x) & R'''(x) & S'''(x) \end{vmatrix}$$

este de grad cel mult 4 [(2)].

Rezolvare. Deoarece polinoamele $P,\ Q,\ R,\ S$ sunt de grad ≤ 4 avem

$$P^{(k)}(x) = 0,\quad Q^{(k)}(x) = 0,\quad R^{(k)}(x) = 0,\quad S^{(k)}(x) = 0,\quad (k = 5, 6, 7\dots).$$

Calculând derivatele lui $T(x)$ avem

$$T'(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) & S(x) \\ P'(x) & Q'(x) & R'(x) & S'(x) \\ P''(x) & Q''(x) & R''(x) & S''(x) \\ P^{(4)}(x) & Q^{(4)}(x) & R^{(4)}(x) & S^{(4)}(x) \end{vmatrix},$$

$$T''(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) & S(x) \\ P'(x) & Q'(x) & R'(x) & S'(x) \\ P'''(x) & Q'''(x) & R'''(x) & S'''(x) \\ P^{(4)}(x) & Q^{(4)}(x) & R^{(4)}(x) & S^{(4)}(x) \end{vmatrix},$$

$$T'''(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) & S(x) \\ P''(x) & Q''(x) & R''(x) & S''(x) \\ P'''(x) & Q'''(x) & R'''(x) & S'''(x) \\ P^{(4)}(x) & Q^{(4)}(x) & R^{(4)}(x) & S^{(4)}(x) \end{vmatrix},$$

$$T^{(4)}(x) = \begin{vmatrix} P'(x) & Q'(x) & R'(x) & S'(x) \\ P''(x) & Q''(x) & R''(x) & S''(x) \\ P'''(x) & Q'''(x) & R'''(x) & S'''(x) \\ P^{(4)}(x) & Q^{(4)}(x) & R^{(4)}(x) & S^{(4)}(x) \end{vmatrix},$$

$$T^{(5)}(x) = 0 \ ,$$

deci *grad* $T \leq 4$.

Bibliografie

[1] Buşneag, D., Maftei, I., *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983.

[2] Mitrinović, D.S., *Matrice i determinante*, Zbornik zadataka i problema, Editura Naučna knjiga, Beograd, 1972.

[3] Rizescu, Gh., *Sumă şi produs*, Editura Sigma Primex, Bucureţi, 1999.

Colegiul Economic "George Bariţiu" Sibiu
Str. Oituz, nr. 31
550337, Sibiu, România
E-mail: alina.tintea@yahoo.com