Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 29–31

Generalizarea şirului lui Ramanyan [1]

Diana Todorescu

Abstract

In this note we present a generalization for the Ramanyan sequence.

2000 Mathematical Subject Classification: 40A05

In culegerea de probleme [1] este propusă următoarea problemă:

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}=3.$$

Prezentăm soluţia din [1]. Avem egalităţile evidente:

$$1^2+(n-k+1)(n-k-1)=(n-k)^2,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Utilizând aceste relaţii avem:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}=3,$$

de unde deducem că:

$$y_n\overset{\text{not.}}{=}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}\leq 3. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, cum $\sqrt{1+ab}\leq\sqrt{a}\sqrt{1+ab}$, dacă $a\geq 1$, $a<b$, avem:

$$(n+2)^{2^{1-n}}y_n=\sqrt{(n+2)^{2^{2-n}}}\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}$$

[1] *Received 18, May 2006*

Accepted for publication (in revised form) 28 May, 2006

$$\geq \sqrt{1+2(n+2)^{2^{2-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}}$$

....

$$\geq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-3)\sqrt{1+(n-2)\sqrt{1+(n-1)(n+2)^{2^{2-1}}\sqrt{n+1}}}}}}$$

$$\geq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}=3. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\dfrac{3}{(n+2)^{2^{1-n}}} \leq y_n \leq 3$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$.

Ne propunem să generalizăm această limită şi implicit şirul lui Ramanyan.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 şi raţia $r > 0$. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{r^2+a_2\sqrt{r^2+a_3\sqrt{r^2+\ldots+a_{n-2}\sqrt{r^2+a_{n-1}\sqrt{a_{n+1}}}}}} = a_3.$$

Se observă că pentru $a_1 = 1$ şi $r = 1$ se obţine şirul lui Ramanyan.

Demonstraţia este analoagă. Se verifică uşor identităţile:

$$r^2 + a_{n-k-1}a_{n-k+1} = a_{n-k}^2, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Utilizând aceste identităţi, succesiv avem:

$$\sqrt{r^2+a_2\sqrt{r^2+a_3\sqrt{r^2+\ldots+a_{n-2}\sqrt{r^2+a_{n-1}\sqrt{a_{n+1}^2}}}}} = a_3,$$

de unde rezultă că

$$y_n \stackrel{\text{not.}}{=} \sqrt{r^2+a_2\sqrt{r^2+a_3\sqrt{r^2+\ldots+a_{n-2}\sqrt{r^2+a_{n-1}\sqrt{a_{n+1}}}}}} \leq a_3. \qquad (3)$$

Pe de altă parte, cum $\sqrt{r^2+ab} \leq \sqrt{a}\sqrt{r^2+ab}$, dacă $a \geq 1$, $a < b$, avem:

$$a_{n+2}^{2^{1-n}} y_n = \sqrt{a_{n+2}^{2^{2-n}}}\sqrt{r^2+a_2\sqrt{r^2+a_3\sqrt{r^2+\ldots+a_{n-2}\sqrt{r^2+a_{n-1}\sqrt{a_{n+1}}}}}} \geq$$

$$\geq \sqrt{r^2 + a_2 a_{n+2}^{2^{2-n}} \sqrt{r^2 + a_3 \sqrt{r^2 + \ldots + a_{n-2} \sqrt{r^2 + a_{n-1} \sqrt{a_{n+1}}}}}} \geq$$

. . . .

$$\geq \sqrt{r^2 + a_2 \sqrt{r^2 + a_3 \sqrt{r^2 + \ldots + a_{n-3} \sqrt{r^2 + a_{n-2} \sqrt{r^2 + a_{n-1} a_{n+2}^{2^{2-1}} \sqrt{a_{n+1}}}}}}} \geq$$

$$\geq \sqrt{r^2 + a_2 \sqrt{r^2 + a_3 \sqrt{r^2 + \ldots + a_{n-2} \sqrt{r^2 + a_{n-1} \sqrt{a_{n+1}^2}}}}} = a_3. \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă că: $\dfrac{a_3}{a_{n+2}^{2^{1-n}}} \leq y_n \leq a_3$, de unde $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a_3$.

Bibliografie

[1] Eugen Popa, *Analiză Matematică*, Problema 7, Cap. 1, pag. 10, Editura GIL, Zalău, 2005

Studentă Facultatea de Ştiinţe,
Universitatea Lucian Blaga din Sibiu,
I. Raţiu, No. 5-7,
550012 Sibiu, Romania