Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 63–72

Combinări generalizate [1]

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we propose a generalization of the combination notion. We give the generalized combinations definition and we present the issue of distributing the objects into cells. We also present the complementar combinations formula and two recurrence relations concerning the generalized combinations.

Next, we develope a general method for the generalized combinations calculation: the Newton type polynomials method.

In the end of the paper we propose three applications and we indicate the references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, în combinările simple de m obiecte luate câte k, orice obiect apare cel mult câte o singură dată, pe când în cazul combinărilor cu repetiţie orice obiect se poate repeta, de maximum k ori.

În cele ce urmează vom considera cazul general, când obiectul i se poate repeta de maximum l_i ori, unde $l \leq l_i \leq k$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ [2].

[1] *Received 19 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 25 May, 2006

2 Definiţie

Prin combinări generalizate de n obiecte $l_1, l_2, \ldots, l_m$ luate câte k înţelegem submulţimile conţinând k obiecte diferite sau identice care se pot forma pe rând din cele $n = \sum_{i=1}^{m} l$ obiecte (m clase de obiecte, din clasa i având l_i obiecte identice).O astfel de mulţime,care poate conţine şi elemente identice,se numeşte mulţime multiplă.

Numărul combinărilor generalizate de n obiecte $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ luate câte k se notează cu:

$$C_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{k} \ .$$

Trebuie evident să avem: $n \geq k$ şi $l \leq l_i \leq k$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Prin particularizare se regăsesc combinările simple şi cele cu repetiţie:

$$\begin{array}{ll} C_{n\ (1,1,\ldots,1)}^{k} = C_m^k & \quad (m = n) \\ C_{n\ (k,k,\ldots,k)}^{k} = c_m^k & \quad (mk = n)\ . \end{array}$$

Exemplu. Să considerăm combinările de 7 obiecte (3, 3, 1) luate câte 3.

Obiectele sunt: 1 1 1 2 2 2 3.

Construind sistematic combinările generalizate, obţinem următoarea listă:

1 1 1; 1 1 2; 1 1 3; 1 2 2; 1 2 3; 2 2 2; 2 2 3

Lista conţine 7 poziţii, deci, prin enumerare am obţinut rezultatul:

$$C_{7\ (3,3,1)}^{3} = 7$$

Cazuri particulare. Pentru cazurile particulare $k = 0$, $k = 1$, $k = n - 1$ şi $k = n$, numărul combinărilor generalizate se determină cu ajutorul următoarelor formule, care rezultă imediat din definiţie:

$$\begin{aligned} C^0_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} &= l \\ C^1_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} &= m \\ C^{n-1}_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} &= m \\ C^n_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} &= l\ . \end{aligned}$$

Deci, patru formule simple în care valorile indicilor $l_1, l_2, \ldots, l_m$ nu intervin.

3 Problema distribuirilor

Vom considera în continuare o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe. Căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult 1 obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea 1.

Problemă:
Considerăm k obiecte identice şi m căsuţe de capacităţi l $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Se distribuie cele k obiecte identice în cele m căsuţe. în câte moduri se poate face distribuirea?

Vom arăta că numărul de distribuiri posibile este:

$$C^k_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)}\ .$$

Să considerăm la început un caz particular cu interpretările conform definiţiei şi problemei distribuirilor:

$$C^2_{4\ (2,1,1)} = 4\ .$$

Aceste interpretări, corespunzătoare definiţiei, respectiv problemei distribuirilor, rezultă din tabelele următoare.

Definiţie	Problema distribuitorilor
Obiecte: 1123	Obiecte: AA

11
12
13
23

AA		
A	A	
A		A
	A	A

După cum se observă, orice grupare poate fi interpretată ca indicând căsuţele în care se plasează obiectele A, A şi invers, orice distribuire în căsuţe determină o grupare. De exemplu, gruparea 12 arată că obiectul A se plasează în căsuţa 1 iar celălalt obiect A în căsuţa 2, respectiv a patra distribuire în căsuţe conduce la gruparea 23.

Acest principiu se poate evident aplica pe cazul general, deci între submulţimi şi distribuirile în căsuţe există o corespondenţă biunivocă, ceea ce arată că ele au acelaşi număr de elemente.

4 Formula combinărilor complementare

Există următoarea formulă,care rezultă imediat din definiţia combinărilor generalizate:

$$C^k_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} = C^{n-k}_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)}\ .$$

Această formulă o vom numi formula combinărilor generalizate complementare. Ea generalizează cunoscuta formulă a combinărilor complementare:

$$C^k_m = C^{m-k}_m\ .$$

Într-adevăr, putem scrie:

$$C^k_m = C^k_{n\ (1,1,\ldots,1)} = C^{n-k}_{n\ (1,1,\ldots,1)} = C^{n-k}_m = C^{m-k}_m \qquad (\text{avem } n=m)\ .$$

Generalizarea este astfel probată.

5 Formule de recurenţă

Există următoarele formule de recurenţă, ale căror demonstraţii le propunem ca exerciţiu cititorului.

Formula de recurenţă I:

$$C^k_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} = \sum_R l = \mid R \mid,$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 = x_i = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|R|$ termeni (cardinalul mulţimii R) şi evident, valoarea $|R|$.

Deci, numărul combinărilor generalizate este egal cu numărul soluţiilor cu numere naturale ale unei ecuaţii diofantice liniare, cu coeficienţi unitari şi cu limitări superioare ale necunoscutelor.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm numărul $C^3_{7\ (3,3,1)}$.

Ecuaţia $x_1+x_2+x_3 = 3$, cu condiţiile $0 = x_1 = 3$, $0 = x_2 = 3$, $0 = x_3 = 1$ are următoarele soluţii:

$$(0, 2, 1);\ (0, 3, 0);\ (1, 1, 1);\ (1, 2, 0);\ (2, 0, 1);\ (2, 1, 0);\ (3, 0, 0).$$

Deci:

$$C^3_{7\ (3,3,1)} = 7\ .$$

Formula de recurenţă II:

$$C^k_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} = C^k_{n-l_m\ (l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} +$$

$$+ C^{k-1}_{n-l_m\ (l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} + C^{k-2}_{n-l_m\ (l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} + \ldots + C^{k-l_m}_{n-l_m\ (l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})}$$

Suma din membrul drept are $l_m + 1$ termeni.

Observăm că această formulă generalizează cunoscuta relaţie valabilă pentru combinările simple:

$$C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} \; .$$

Pentru aceasta,particularizăm $l_1 = l_2 = \ldots = l_m = 1$ (deci $m = n$) în formula de recurenţă II a combinărilor generalizate.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm acelaşi număr $C^3_{7\ (3,3,1)}$. Obţinem:

$$C^3_{7\ (3,3,1)} = C^3_{6\ (3,3)} + C^2_{6\ (3,3)} \; .$$

Utilizând una din metodele de calcul expuse în prezentul articol, obţinem:

$$C^3_{6\ (3,3)} = 4 \quad ; \quad C^2_{6\ (3,3)} = 3 \; .$$

Deci: $C^3_{7\ (3,3,1)} = 4 + 3 = 7$.

6 Metoda polinoamelor de tip Newton

În continuare vom dezvolta o metodă generală pentru calculul combinărilor generalizate (metoda polinoamelor de tip Newton [3], [4]).

Vom considera la început un caz particular, respectiv calculul numărului $C_{5(3,2)^3}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui trei obiecte identice în două căsuţe de capacităţi trei respectiv doi. La fiecare distribuire a obiectelor în căsuţe rămân două locuri necompletate. Să introducem o clasă de obiecte fictive, având două astfel de obiecte, astfel încât la fiecare distribuire a obiectelor, căsuţele să fie complet ocupate. Aceste obiecte fictive corespund "golurilor" sau "lipsurilor" din căsuţe la o distribuire a celor trei obiecte identice. De asemenea, să presupunem la început că fiecare căsuţă poate primi cinci obiecte.

Cele trei obiecte identice se pot distribui toate în prima căsuţă,toate în a doua căsuţă,două în prima căsuţă şi una în a doua casuţă sau una în prima căsuţă şi două în a doua căsuţă. Acestor posibilităţi de distribuire a celor trei obiecte le putem ataşa polinomul simetric şi omogen de două nedeterminate:

$$P_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 \ .$$

Cele două obiecte fictive (”golurile”) se pot distribui ambele în prima căsuţă, ambele în a doua căsuţă sau una în prima şi cealaltă în a doua căsuţă. Polinomul ataşat va fi:

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2 \ .$$

Distribuirilor celor cinci obiecte le corespunde polinomul:

$$P_3 \cdot P_2 = y_1^5 + 2y_1^4 y_2 + 3y_1^3 y_2^2 + 3y_1^2 y_2^3 + 2y_1 y_2^4 + y_2^5 \ .$$

Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de nedeterminata respectivă. Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, prima căsuţă poate primi maximum trei obiecte iar a doua maximum două obiecte, deci distribuirile sunt de tipul $y_1^3 y_2^2$.

Deci, rezultă: $C^3_{5(3,2)} = 3$.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene de felul celor de mai sus prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţii de tip Newton, [1]).

Astfel, notând:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 \\ x_3 &= y_1^3 + y_2^3 \end{aligned}$$

avem:

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)\\
P_3 &= \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)\\
P &= P_3 \cdot P_2 = \frac{1}{12}(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 2x_1^2x_3 + 3x_1x_2 + 2x_2x_3)\\
P &= \frac{1}{12}[(y_1 + y_2)^5 + 4(y_1 + y_2)^3 \cdot (y_1^2 + y_2^2) + 2(y_1 + y_2)^2 \cdot (y_1^3 + y_2^3) +\\
&+3(y_1 + y_2) \cdot (y_1^2 + y_2^2)^2 + 2(y_1^2 + y_2^2) \cdot (y_1^3 + y_2^3)]
\end{aligned}$$

Cu teorema multinomului [5] extragem coeficientului monomului $y_1^3y_2^2$:

$$N = \frac{1}{12}\left[\frac{5!}{3!2!} + 4\left(\frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{3!0!}\right) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1\right] = 3 \ .$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci pentru calculul aranjamentelor generalizate $C_(n\ (l_1, l_2, \ldots, l_m))$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_k \cdot P_{n-k} \ ,$$

unde:

$$P_k = P_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

este polinomul de tip Newton de grad k în k nedeterminate, iar:

$$P_{n-k} = P_n - k(x_1, x_2, \ldots, x_n - k)$$

este polinomul de tip Newton de grad $n - k$ în $n - k$ nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ va avea gradul n şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(k, n - k)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$\begin{aligned}
&x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_m\\
&x_2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2\\
&\ldots\\
&x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + \ldots + y_m^\lambda \ .
\end{aligned}$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Primele patru polinoame de tip Newton sunt:

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1 \\ P_2 &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) \\ P_3 &= \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) \\ P_4 &= \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \ . \end{aligned}$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pòlya - de Bruijn [5] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

7 Aplicaţii

Ca aplicaţii vom considera trei probleme.

a) Câte mulţimi multiple de patru cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3 dacă în fiecare astfel de mulţime cifra 1 se poate utiliza de cel mult 3 ori, cifra 2 de cel mult două ori şi cifra 3 de cel mult două ori?

b) Patru mingi de tenis identice urmează a fi introduse în trei cutii distincte având capacitatea de a cuprinde trei, trei şi respectiv două mingi. în câte moduri se poate face distribuirea mingilor în cutii?

c) Utilizând metoda polinoamelor de tip Newton, să se recalculeze $C^3_{7\ (3,3,1)}$.

Aplicând cele expuse mai sus, se obţin rezultatele:

$$\begin{aligned} &a) \qquad C^4_{7\ (3,2,2)} = 8 \\ &b) \qquad C^4_{8\ (3,3,2)} = 10 \\ &c) \qquad C^3_{7\ (3,3,1)} = 7 \ . \end{aligned}$$

Bibliografie

[1] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor*, vol. I, Editura Tehnică Bucureşti, 1974.

[2] V. M. Popa, *Unele generalizări în combinatorică*, Buletinul Ştiinţific al Institutului de învăţământ Superior Sibiu, vol. III, Sibiu, 1980, pag. 33-39.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică - Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.

[5] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

Universitatea "Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie "Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro