Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 53-55

Generalizarea unei inegalităţi [1]

Vasilica Olaru

Abstract

In this paper we present a generalization of an inequality from the mathematical magazine R. M. T.

2000 Mathematical Subject Clasification: 11A99

1 Introducere

În lucrarea [1] este prezentata următoarea problemă:

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. *Atunci:* :$\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{4}{a+c} + \dfrac{9}{a+b} \geq \dfrac{18}{a+b+c}$.

În această lucrare, utilizând inegalitatea mediilor (vezi [2]), vom prezenta o generalizare a acestei inegalităti.

2 Rezultat Principal

Propoziţia 2.1. *Fie* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$. *Atunci:*

$$\frac{\alpha_1}{a_2+\cdots+a_n}+\frac{\alpha_2}{a_1+a_3\cdots+a_n}+\cdots+\frac{\alpha_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}} \geq \frac{(\sqrt{\alpha_1}+\cdots+\sqrt{\alpha_n})^2}{(n-1)(a_1+\cdots+a_n)}$$
(1)

[1] *Received 18 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 28 May, 2006

Demonstraţie: Notăm cu:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{a_2 + \cdots + a_n}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_2}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\alpha_n}{a_1 + \cdots + a_{n-1}}.$$

Atunci se obţine

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{n-1} \cdot (\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}).$$

Inegalitatea (1) devine:

$$(x_1 + \cdots + x_n) \cdot (\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}) \geq \frac{(\sqrt{\alpha_1} + \cdots + \sqrt{\alpha_n})}{(n-1)}.$$

Dar

$$(x_1 + \cdots + x_n) \cdot (\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}) = \alpha_1 + \cdots \alpha_n + x_1 \cdot \frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + x_1 \cdot \frac{\alpha_n}{x_n} + \cdots + x_n \cdot \frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + x_n \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

Aplicăm inegalitatea mediilor şi astfel fiecare termen din relaţia de mai sus are proprietatea :

$$x_i \cdot \frac{\alpha_j}{x_j} + x_j \cdot \frac{\alpha_i}{x_i} \geq 2 \cdot \sqrt{\alpha_i \alpha_j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Prin urmare

$$(x_1 + \cdots + x_n) \cdot (\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}) \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + 2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\alpha_i \alpha_j} = (\sqrt{\alpha_1} + \cdots + \sqrt{\alpha_n})^2.$$

Observaţie 2.1. *Pentru* $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 9$ *se obţine problema numărul IX .174 din revista R.M.T, an X , nr.3 din 2005.*

Propoziţia 2.2. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *mărginite.Atunci pentru orice* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *şi* $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *avem*

$$\frac{f(\alpha_1)}{g(a_2) + \cdots + g(a_n)} + \frac{f(\alpha_2)}{g(a_1) + g(a_3) \cdots + g(a_n)} + \cdots + \frac{f(\alpha_n)}{g(a_1) + \cdots + g(a_{n-1})} \geq$$

$$\geq \frac{(\sqrt{f(\alpha_1)} + \cdots + \sqrt{f(\alpha_n)})^2}{(n-1)(g(a_1) + \cdots + g(a_n))}$$

Demonstraţie: Se aplică Propoziţia 2.1 pentru $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^*$ şi $g(a_1), \cdots, g(a_n) \in \mathbb{R}_+^*$. Condiţia de mărginire elimină cazurile $\frac{\infty}{\infty}$.

Bibliografie

[1] Revista de Matematică din Timişoara ,*Problema IX 174*, An X, Nr. 3, 2005.

[2] Mircea Ganga, *Matematică. Manual pentru clasa a-IX-a*, Editura MathPress, 2003.

Scoala Genarală Iacobeni ,
jud. Sibiu, Romania,
E-mail: olarv2@yahoo.com