Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 11–15

O margine superioară pentru numărul rădăcinilor reale ale unui polinom cu coeficienţi complecşi [1]

Alexe Călin Mureşan, Alexandra Dan, Ana Mihaela Gârbea

Abstract

In this article a number r will be found, for complex coefficients polynomial, which is larger than the number of polynomial real roots. This number can be found taking into account the polynomial coefficients and allows an evaluation on the number of the polynomial real roots.

2000 Mathematical Subject Classification: 11C08
Key words: complex coefficients polynomial, real roots number.

În această lucrare obţinem o margine superioară pentru numărul rădăcinilor reale ale unui polinom cu coeficienţi complecşi.

Teoremă 1. *Fie*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x],$$

cu $a_0 \neq 0, a_n \neq 0; L(P) =$ *lungimea lui* P*,* $L(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, r =$ *numărul de rădăcini reale ale lui* P*.Atunci* $r \leq 4n \ln\left(\frac{L(P)}{\sqrt{|a_0 a_n|}}\right)$.

[1] *Received 18 December 2006*
Accepted for publication (in revised form) 29 December 2006

Demonstraţie. Fie r' numărul rădăcinilor reale de modul mai mare sau egal cu 1 $r-r'$ numărul rădăcinilor reale de modul mai mic decât 1.Rezultă că $r-r'$ este numărul rădăcinilor reale de modul mai mare sau egal cu 1 pentru polinomul reciproc $Q = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Vom demonstra că $r' \leq 2\sqrt{n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_n|}\right)}$ pentru $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

Printr-un raţionament similar putem atunci arăta, deoarece $L(Q) = L(P)$, că

$$r - r' \leq 2\sqrt{n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)} \text{ pentru}$$

$$Q = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Şi atunci din cele două relaţii vom avea:

$$r = r' + (r - r') \leq r'(r - r') \leq \frac{r'^2 + (r - r')^2}{2} \leq 4n \ln \frac{L(P)}{\sqrt{|a_0 \cdot a_n|}}.$$

Deci, $r \leq 4n \ln \dfrac{L(P)}{\sqrt{|a_0 \cdot a_n|}}$.

Revenind la problemă rămâne de arătat că $r' \leq 2\sqrt{n \ln \frac{L(P)}{|a_n|}}$, r' fiind numărul rădăcinilor reale cu modulul mai mare decat 1, pentru $P(x)$.

Lemă 1. *Oricare ar fi $k \in \mathbb{N} : r' \leq k + \alpha$, unde α este numărul rădăcinilor reale de valoare absolută mai mare sau egala cu 1 ale polinomului $F_k(x) = n^{-k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^k P(x)$ adică $F_k(x) = n^{-1} \cdot x \cdot \frac{dF_{k-1}(x)}{dx}$ şi α numărul rădăcinilor reale ale polinomului reciproc $F^*(x) = x^n \cdot F_k(x^{-1})$ de modul mai mic sau egal cu 1.*

Demonstraţie. Se utilizează inducţia matematică şi **teorema lui Rolle**

Astfel: $k = 1$ implică

$$F_1(x) = \frac{1}{n} \cdot x \cdot P'(x); F_1(x) = 0 \text{ atunci } x = 0 \text{ sau } P'(x) = 0 \qquad (1)$$

şi conform **Teoremei lui Rolle**

$$P'(x) \text{ are cel puţin } r' - 1 \text{ rădăcini reale de modul } \geq 1. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $F_1(x)$ are cel puţin $(r' - 1) + k = r'$ rădăcini.

Se ştie $\text{grad}F_1(x) = \text{grad}P(x) = n$ şi se repetă procedeul. Rezultă $r' \leq k + \alpha$, cu α numărul rădăcinilor de modul ≥ 1 pentru $F(x)$.

- $k = 1$ implică

$$F_1(x) = n^{-1}xP'(x) = \frac{1}{n} \cdot x \cdot (na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) =$$
$$= \frac{n}{n}a_n x^n + \frac{n-1}{n}a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \frac{2}{n}a_2x^2 + \frac{1}{n}a_1x.$$

- $k = 2$ implică

$$F_2(x) = n^{-1}x\left(\frac{n^2}{n}a_n x^{n-1} + \frac{(n-1)^2}{n}a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \frac{2^2}{n}a_2x + \frac{1}{n}a_1\right) =$$
$$= \frac{n^2}{n^2}a_n x^n + \frac{(n-1)^2}{n^2}a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \frac{2^2}{n^2}a_2x^2 + \frac{1}{n^2}a_1x$$
$$\cdots$$
$$F(x) = F_k(x) = n^{-k}\left(x\frac{d}{dx}\right)^k P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n-i)^k}{n^k}a_i x^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)^k a_i x^i \text{ şi } F^* \text{ sunt polinoame reciproce}$$
$$\text{implică:} F^*(x) = x^n F(x^{-1}) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\left(1 - \frac{j}{n}\right)^k x^j.$$

Deoarece $F(x)$ şi $F^*(x)$ au următoarele proprietăţi: $F(x) = 0$ pentru $|x| \geq 1$ şi $F^*\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pentru $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$, rezultă că α este numărul rădăcinilor reale cu modul mai mare sau egal cu 1 pentru $F(x)$ este numărul rădăcinilor reale de modul mai mic sau egal cu 1 pentru $F^*(x)$.

Fie $R \in \mathbb{R}; R > 1$. Din **inegalitatea lui Jensen** rezultă că numărul tuturor rădăcinilor (complexe) ale polinomului F^* din discul $|z| \leq 1$ sunt mărginite de cantitatea: $\alpha \leq \dfrac{\ln\left[\max\limits_{|z|=R}\left\{\dfrac{|F^*(z)|}{|F^*(0)|}\right\}\right]}{\ln R}$.

Alegem $R = e^{k/n}$. Atunci,

$$\max\{|F^*(z)|; |z| = R\} \leq \sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}| \left(1 - \frac{j}{n}\right)^k e^{k(j/n)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}| = L(P) \text{ deoarece } \left(1 - \frac{j}{n}\right)^k \cdot e^{k(j/n)} =$$

$$= (1-x)^k \cdot e^{kx} \overset{\text{not}}{=} g(x).$$

$$g'(x) = k \cdot (1-x)^{k-1} \cdot (-1) \cdot e^{kx} + (1-x)^k \cdot e^{kx} \cdot k =$$

$$= k \cdot (1-x)^{k-1} \cdot e^{kx} \cdot (-1 + 1 - x) < 0$$

din care rezultă că g este descrescătoare; $g(0) = 1$ (valoare maximă). Avem, de asemenea, că:

$F^*(0) = a_n$ implică $\alpha \leq \dfrac{\ln\left(\dfrac{L(P)}{|a_n|}\right)}{\dfrac{k}{n}}$, deci $\alpha \leq \dfrac{n}{k} \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}$.

Din $r' \leq k + \alpha$ rezultă că $r' \leq k + \dfrac{n}{k} \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}$.

Fie $k = \left[\left(n \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2}\right] + 1$.

Rezultă că $r' \leq \left[\left(n \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2}\right] + 1 + \dfrac{n}{\left[\left(n \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2}\right] + 1} \cdot \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}$

şi de asemenea,

$$r' \leq \left[\left(n \ln \frac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2}\right] + 1 + \frac{n \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}}{\left[\left(n \ln \dfrac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2}\right] + 1},$$

$$r' \leq \left(n \ln \frac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2} + \left(n \ln \frac{L(P)}{|a_n|}\right)^{1/2} \text{ deci } r' \leq 2\sqrt{n \ln \left(\frac{L(P)}{|a_n|}\right)}.$$

Bibliografie

[1] Gouvea, F.Q., *P-adic numbers. An introduction (2nd ed.),* New York: Springer-Verlag, 1997.

[2] Knuth, D., *The Art of Programming v1.2 (2nd ed.),* Boston: Addison-Wesley, 1981.

[3] Mignotte, M., *Introducere în algebra computaţională şi programare liniară,* Ed. Univ. Bucureşti, 2000.

Asist. drd. Mureşan Alexe Călin,
Catedra de Matematică
Universitatea Petrol-Gaze Ploieşti

Studenta Dan Alexandra,
an lV, Fac. I.M.E., Calculatoare,
U.P.G. Ploieşti

Studenta Gârbea Ana Mihaela,
an lll, Fac de Litere şi Ştinţe
U.P.G. Ploieşti