Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 57–61

Asupra unor inegalităţi [1]

Mioara Macrea

Abstract

In this paper we present a generalization of Riemman series segments for arithmetical progressions with strictly positive terms, using average inequality and sum calculation.

2000 Mathematical Subject Clasification: 46E35

1 Problema 1

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea :

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq \frac{2n}{n+1} \tag{1}$$

Demonstraţie. Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt{k} \leq \frac{k+1}{2}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^*$$

deci $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{k+1}$ şi $\dfrac{1}{k\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$. Prin însumare rezultă că:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq \frac{2n}{n+1},$$

adică inegalitatea (1).

Pornind de la aceastaă idee se pot obţine câteva generalizări.

[1] *Received 18 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 25 May, 2006

2 Generalizare 1

Dacă $(a_n)_n \geq 1$ *este o progresie aritmetică cu* $a_1 > 0$, $r > 0$ *atunci :*

$$\frac{1}{a_1\sqrt{a_1}} + \frac{1}{a_2\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{a_n\sqrt{a_n}} \geq \frac{2n\sqrt{r}}{a_1 a_{n+1}}.$$

Demonstraţie. Din $\sqrt{a_k \cdot r} \leq \frac{a_k + r}{2} = \frac{a_{k+1}}{2}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_{k+1}}$ şi deci $\frac{1}{a_k\sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_k a_{k+1}} = \frac{2}{\sqrt{r}}(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}})$. Însumând se obţine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k\sqrt{a_k}} \geq \frac{2}{\sqrt{r}}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}) = \frac{2n\sqrt{r}}{a_1 a_{n+1}}.$$

Tot în lucrarea (1) au apărut încă două probleme, ale căror enunţuri şi generalizări sunt prezentate în continuare.

3 Problema 2

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *să se demonstreze că :*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)\sqrt{n}} \geq \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}. \tag{2}$$

4 Generalizarea 2

Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$, *este o progresie aritmetică cu* $a_1 > 0$, $r > 0$ *atunci :*

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_3\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}\sqrt{a_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{r}}(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}})$$

Demonstraţie. Utilizând ca mai sus inegalitatea mediilor , rezultă că

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_{k+1}}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^*,$$

de unde avem

$$\frac{1}{a_k \cdot a_{k+2}\sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}}\right).$$

Însumând se obţine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+2}\sqrt{a_k}} \geq \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} - \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}\right).$$

Pentru $a_1 = r = 1$ se obţine inegalitatea (2).

5 Generalizarea 3

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_1, r > 0$ atunci oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ are loc

$$(3)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+p}a_{k+p-1}\cdots a_{k+2}a_k\sqrt{a_k}} \geq \frac{2}{p\sqrt{r}}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_p} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+p}}\right)$$

Demonstraţie. Din

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_{k+1}}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că

$$\frac{1}{a_{k+p} \cdot a_{k+p-1} \cdots a_{k+2} \cdot a_k \cdot \sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{a_{k+p} \cdot a_{k+p-1} \cdots a_{k+1} \cdot a_k}, \quad \text{oricare ar fi } k, p \in \mathbb{N}^*,$$

adică:

$$\frac{1}{a_{k+p} \cdot a_{k+p-1} \cdots a_{k+2} \cdot a_k \cdot \sqrt{a_k}} \geq \frac{2\sqrt{r}}{pr}\left(\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_{k+p-1}} - \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdots a_{k+p}}\right).$$

Prin însumare se obţine inegalitatea (3).

Pentru $a_1 = r = 1$, inegalitatea (3) devine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}(k+2)(k+3)\cdots(k+p)} \geq \frac{2}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right).$$

care se mai poate sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k+p)!k\sqrt{k}} \geq \frac{2}{p}(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}).$$

6 Problema 3

Să se demonstreze că :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\sqrt{k^2+k}} \geq \frac{2n}{2n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^* \tag{4}$$

Demonstraţie. $\sqrt{k^2+k} \leq \frac{2k+1}{2},\ k \in \mathbb{N}^*$. Deci

$$\frac{1}{(2k-1)\sqrt{k^2+k}} \geq (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}).$$

Prin însumare rezultă inegalitatea (4).

Pornind de la această idee, au loc şi în acest caz generalizări pentru progresii aritmetice cu termeni strict pozitivi.

7 Generalizarea 4

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică cu* $a_1, r > 0$ *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a_1+a_{2k-2})\sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}} \geq \frac{2n}{(a_0+a_1)(a_1+a_{2n})}, \tag{5}$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2k}}{2k} = \frac{a_1+a_{2k}}{2}.$$

Deci

$$\frac{1}{(a_1+a_{2k-2})\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}} \geq \frac{1}{r}(\frac{1}{a_1+a_{2k-2}} - \frac{1}{a_1+a_{2k}})$$

şi, prin însumare, se obţine inegalitatea din enunţ.

Ca un caz particular, pentru $a_1 = r = 1$ se obţine următorul rezultat:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\sqrt[2k]{(2k)!}} \geq \frac{2n}{2n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pornind de la aceeiaşi idee se poate formula următorul rezultat:

8 Problema 4

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică cu* $a_1, r > 0$ *atunci:*

$$(6)\ \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}^3} \leq \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right), \textit{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţie. Deoarece $\sqrt{a_k a_{k+2}} \leq \frac{a_k + a_{k+2}}{2} = a_{k+1}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $\frac{1}{a_{k+1}^2} \leq \frac{1}{a_{k+1}^2}$, adică $\frac{1}{a_{k+1}^3} \leq \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$, iar prin însumare obţinem inegalitatea cerută.

Problema 1 aparţine lui Marian Ion Popa din GM 3/1994 şi a apărut în [1] împreună cu problemele 2 şi 3.

Bibliografie

[1] Berinde Vasile , *Exploatare , investigare şi descoperire în matematică* , Editura Eferide , Baia Mare, 2001.

[2] Andrei Gh. *Şiruri şi progresii*, Editura Paralela 45, 2001.

Liceul Teoretic "Onisifor Ghibu" Sibiu
Str. Bihorului, nr. 3
Sibiu - Romania