Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 79–84

Asupra unei probleme de aritmetică [1]

Florea Simona

Abstract

In this paper we generalize a problem proposed in the [1].

2000 Mathematical Subject Classification: 11A99

Fie b şi n două numere naturale date, $b \geq 2$ şi $n \geq 2$.
Să se determine cea mai mică valoare pe care o poate lua raportul

$$\frac{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(b)}}}{a_0 + a_1 + \dots a_n}$$

unde $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(b)}}$ *este un număr scris în baza* b.

Soluţie. Notăm cu $R_n(b)$ raportul din enunţul problemei.
Avem:

$$R_n(b) = \frac{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0}{a_0 + a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{b^n (a_0 + a_1 + \dots + a_n)}{a_0 + a_1 + \dots a_n} = b^n$$

cu egaliate pentru $a_n \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ şi $a_0 = a-1 = \dots = a_{n-1} = 0$.
Rezultă că maximul lui $R_n(b)$ este b^n şi se atinge pentru numerele de forma $a_n \cdot b^n, a_n \in \{1, 2, \dots, b-1\}$

Să determinăm acum minimul lui $R_n(b)$.
Avem:

$$R_n(b) = \frac{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0}{a_0 + a_1 + \dots + a_n} =$$

[1] *Received 17 May, 2006*
Accepted for publication (in revised form) 21 May, 2006

$$= 1 + \frac{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} - 1$$

$$= 1 + \frac{a_n(b^n - 1) + a_{n-1}(b^{n-1} - 1) + \ldots + a_1(b-1)}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$$

$$= 1 + \frac{a_n(b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + 1)}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$$

$$+ \frac{a_{n-1}(b-1)(b^{n-2} + b^{n-3} + \ldots + 1) + \ldots + a_1(b-1)}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$$

$$= 1 + (b-1) \cdot \frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{nori} \cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{nori} \cdot a_{n-1} + \ldots + 11_{(b)} \cdot a_2 + a_1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} \geq$$

$$\geq 1 + (b-1) \cdot \frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{nori} \cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{nori} \cdot a_{n-1} + \ldots + 11_{(b)} \cdot a_2 + a_1}{(b-1) + a_1 + \ldots a_n} =$$

$$= 1 + (b-1) \cdot \left[1 + \frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{nori} \cdot a_n + \ldots a_1}{(b-1) + a_1 + \ldots a_n} - 1 \right]$$

$$= b + (b-1) \cdot \frac{a_n(b^{n-1} + \ldots + 1) + \ldots + a_2(b+1) + a_1 - (b-1) - a_1 - \ldots a_n}{(b-1) + a_1 + \ldots a_n}$$

$$= b + (b-1) \cdot \frac{a_n(b^{n-1} + |b^{n-2} + \ldots + b) + \ldots + a_2 b - (b-1)}{(b-1) + a_1 + \ldots a_n}$$

$$= b + (b-1)\cdot(\frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{n-1ori}\cdot b\cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{n-2ori}\cdot b\cdot a_{n-1} + \ldots + 11_{(b)}\cdot b\cdot a_3}{(b-1)+a_1+\ldots a_n} +$$

$$+\frac{b\cdot a_2-(b-1)}{(b-1)+a_1+\ldots a_n}) \geq$$

$$\geq b + (b-1)\cdot(\frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{n-1ori}\cdot b\cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{n-2ori}\cdot b\cdot a_{n-1} + \ldots + 11_{(b)}\cdot b\cdot a_3}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n}$$

$$+\frac{b\cdot a_2-(b-1)}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n})$$

$$= b + (b-1)\left[b + \frac{\underbrace{\overline{11\ldots1}_{(b)}}_{n-1ori}\dot{b}\dot{a}_n + \ldots + b\cdot a_2 - (b-1)}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n} - b\right]$$

$$= b^2 + (b-1)\cdot(\frac{b\cdot a_n(b^{n-2}+\ldots+1)+\ldots+b\cdot a_2}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n} -$$

$$-\frac{(b-1)+2b(b-1)+b\cdot a_2+\ldots+b\cdot a_n}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n})$$

$$= b^2 + (b-1)\cdot(\frac{b^2\cdot a_n(b^n-3+\ldots+1)+b^2\cdot a_{n-1}(b^{n-4}+\ldots+1)+\ldots}{2(b-1)+a_2+\ldots a_n} +$$

$$+\frac{\ldots b^2\cdot a_3(b-1)(1+2b)}{2(b-1)+a_2+\ldots a_n}) =$$

$$= b^2 + (b-1)\cdot(\frac{\underbrace{\overline{11\ldots100}_{(b)}}_{n-2ori}\cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots100}_{(b)}}_{n-3ori} + \ldots + \overline{100}_{(b)}\cdot a_3}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n} -$$

$$-\frac{(b-1)(1+2b)}{2(b-1)+a_2+\ldots+a_n}) \geq$$

$$\geq b^2 + (b-1)\cdot(\frac{\underbrace{\overline{11\ldots100}_{(b)}}_{n-2ori}\cdot a_n + \underbrace{\overline{11\ldots100}_{(b)}}_{n-3ori}\cdot a_{n-1} + \ldots + \overline{100}_{(b)}\cdot a_3}{3(b-1)+a_3+\ldots+a_n} -$$

$$-\frac{(b-1)(1+2b)}{3(b-1)+a_3+\ldots+a_n})$$

$$= b^2+(b-1)\left[b^2 + \frac{b^2 a_n(b^{n-3}+\ldots+1)+\ldots+b^2a_3-(b-1)(1+2b)}{3(b-1)+a_3+\ldots+a_n} - b^2\right]$$

$$= b^3 + (b-1)\cdot\frac{b63\cdot a_n(b^{n-4}+\ldots+1)+\ldots+b^3a_4-(b-1)(1+2b+3b^2)}{3(b-1)+a_3+\ldots+a_n}$$

$$= b^3 + (b-1)\cdot\frac{\underbrace{\overline{11\ldots1000}_{(b)}}_{n-3ori}\cdot a_n + \ldots + \overline{1000}_{(b)}\cdot a_4 - (b-1)(1+2b+3b^2)}{3(b-1)+a_3+\ldots+a_n}$$

Repetând procesul de înca $(n-4)$ ori, obţinem:

$$R_n(b) \geq b^{n-1} + (b-1)\cdot\frac{b^{n-1}a_n-(b-1)(1+2b+3b^2+\ldots+(n-1)b^{n-1})}{(n-1)(b-1)+a_{n-1}+a_n}$$

Cum
$1+2b+3b^2+\ldots+(n-1)b^n-1 = \dfrac{(n-1)\cdot b^n - n\cdot b^{n-1}+1}{(b-1)^2}$, găsim:

$$R_n(b) \geq b^{n-1} + (b-1) \cdot \frac{b^{n-1}a_n - \dfrac{(n-1)\cdot b^n - n \cdot b^{n-1} + 1}{b-1}}{(n-1)(b-1)+a_{n-1}+a_n} \geq$$

$$\geq b^{n-1} + (b-1) \cdot \frac{b^{n-1} - \frac{(n-1)\cdot b^n - n \cdot b^{n-1}+1}{b-1}}{(n-1)(b-1)+1+a_{n-1}}$$

$$\geq b^{n-1} + \frac{(b-1)\cdot b^{n-1} - (n-1)\cdot b^n + n \cdot b^{n-1} - 1}{(n-1)(b-1)+1} =$$

$$= \frac{(n-1)\cdot b^n - (n-1)\cdot b^{n-1} + b^n - b^{n-1} - (n-1)b^n + n \cdot b^n - 1}{(n-1)(b-1)+1}$$

$$= \frac{b^n + b^{n-1} - 1}{(n-1)(b-1)+1} = \frac{\underbrace{110\ldots0_{(b)}}_{n-1 ori} - 1}{(n-1)(b-1)+1} = \frac{\underbrace{\overline{10(b-1)\ldots(b-1)}_{(b)}}_{n-1 ori}}{(n-1)(b-1)+1}.$$

Aşadar, minimul lui $R_n(b)$este:

$$\frac{11_{(b)}b^{n-1} - 1}{(n-1)(b-1)+1} = \frac{\underbrace{\overline{10(b-1)\ldots(b-1)}_{(b)}}_{n-1 ori}}{(n-1)(b-1)+1}.$$

şi acest minim este atins pentru numărul $\underbrace{\overline{10(b-1)\ldots(b-1)}_{(b)}}_{n-1 ori}$

Observaţii:

1. Pentru $b = 10$, găsim ca
   $\max R(10) = \dfrac{\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}}{a_0 + \ldots + a_n} = 10^n$
   şi este atins pentru numărul $a_n \cdot 10^n$, $a_n \in 1, 2, \ldots, 9$, iar

$$\min R(10) = \frac{\overline{a_n \ldots a_0}}{a_0 + \ldots = a_n} = \frac{11 \cdot 10^{n-1} - 1}{9n - 8} = \frac{10\underbrace{9\ldots9}_{n-1 ori}}{9n - 8}$$

şi este atins pentru numărul $10\underbrace{9\ldots9}_{n-1 ori}$

2. Pentru $b = 10$ şi $n = 2$, găsim că
$\max R_2(10) = \dfrac{\overline{a_2a_1a_0}}{a_0 + a_1 + a_2} = 10^2$, cu egalitate pentru numerele $100, 200, \ldots 900$, iar
$\min R_2(10) = \dfrac{\overline{a_2a_1a_0}}{a_0 + a_1 + a_2} = \dfrac{109}{10}$, atins pentru numărul 109.

3. Pentru $b = 10$ şi $n = 3$ găsim că
$\max R_3(10) = \dfrac{\overline{a_3a_2a_1a_0}}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3} = 10^3$,
cu egalitate pentru numerele $1000, 2000, \ldots, 9000$, iar
$\min R_3(10) = \dfrac{\overline{a_3a_2a_1a_0}}{a_0 + a + 1 + a_2 + a_3} = \dfrac{1099}{19}$, atins pentru numerele 1099.

Acest caz constituie problema propusă în revista de matematică de la Timişoara.

Bibliografie

[1] *Revista de Matematică din Timişoara*, Anul I, nr 2 - 1996, Editura Birchi, 1996.

Grupul Şcolar Automecanica
Str. Brateiului, Nr. 6, Mediaş
E-mail: monyfl04@yahoo.com