Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 39-46

Generalizări ale unor probleme de bacalaureat[1]

Leon Blenche

Abstract

In this paper we present generalizations of some problems with limits.

2000 Mathematical Subject Classification: 40A05

În [1] apar următoarele două probleme:

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^{2004}$. Calculaţi
$$l_1=\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right].$$

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2006}$. Să se calculeze
$$l_2=\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right].$$

În această notă ne propunem să generalizăm aceste două probleme.

Teorema 1. *Dacă* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$, *derivabilă pe* $(0,1)$, *cu derivata continuă şi mărginită pe* $(0,1)$, *atunci:*
$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

[1] *Received 11 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 21 May, 2006

Demonstraţie 1. Considerăm funcţia $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, pentru orice $x \in [0,1]$. Atunci G este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$ şi, pentru orice $x \in (0,1)$, $G'(x) = f(x)$, iar $G''(x) = f'(x)$. Atunci pentru orice $x_0 \in [0,1]$ există un c între x şi x_0 astfel încât:

$$G(x) = G(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}G'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}G''(c). \tag{1}$$

Fie $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right)$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ cu norma $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$. Punând în relaţia (1) $x = \frac{k+1}{n}$ şi $x_0 = \frac{k}{n}$, pentru orice $k = \overline{0, n-1}$, obţinem:

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) = G\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}G'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}G''(c_k), \quad \text{cu } c_k \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right).$$

Deci:

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = G(0) + \frac{1}{n}G'(0) + \frac{1}{2n^2}G''(c_0), \qquad \text{cu } c_0 \in \left(0, \frac{1}{n}\right),$$

$$G\left(\frac{2}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}G'\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}G''(c_1), \qquad \text{cu } c_1 \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right),$$

$$G\left(\frac{3}{n}\right) = G\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}G'\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}G''(c_2), \qquad \text{cu } c_2 \in \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$G\left(\frac{n}{n}\right) = G\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n}G'\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}G''(c_{n-1}), \quad \text{cu } c_{n-1} \in \left(\tfrac{n-1}{n}, 1\right).$$

Rezultă că:

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} G'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} G''(c_k),$$

sau

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \\ + \frac{1}{2n^2}\left[f'(c_0) + f'(c_1) + f'(c_2) + \ldots + f'(c_{n-1})\right].$$

Deci $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k)$, sau

$$n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_n}(f', c), \tag{2}$$

unde $c = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ reprezintă un sistem de puncte intermediare asociate funcţiei f' şi diviziunii Δ_n. Deoarece f' este continuă şi mărginită pe $(0,1)$, rezultă că f' este integrabilă pe $[0,1]$, deci şirul $\frac{1}{2}\sigma_{\Delta_n}(f', c)$ este convergent la $\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)-f(0)}{2}$. Din relaţia (2) rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] + f(1) - f(0) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Demonstraţie 2. Considerăm $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right)$ o diviziune a intervalului $[0,1]$, cu norma $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$. Deoarece:

$$n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = n\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right],$$

notând $S_n = n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$, obţinem că $n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n$. Aplicând metoda integrării prin părţi pentru $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x$ şi pentru funcţiile f', $g_k : \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \to \mathbb{R}$, unde $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o prelungire prin continuitate la $[0,1]$ a funcţiei f şi $g(x) = x - \frac{k}{n}$, pentru orice $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, obţinem că există $\xi_k \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ astfel încât:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right)' f(x)\mathrm{d}x = \left(x - \frac{k}{n}\right) f(x)\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} -$$

$$- \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) -$$

$$f'(\xi_k)\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'(\xi_k).$$

Rezultă că:

$$S_n = n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'(\xi_k)-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma_{\Delta_n}(f',\xi),$$

unde $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ reprezintă un sistem de puncte intermediare asociat funcţiei f' şi diviziunii Δ_n. Rezultă că limita cerută este:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right].$$

Observaţie 1. Dacă în teorema 1 luăm funcţiile $f(x)=1-x^{2004}$ şi $f(x)=x^{2006}$, obţinem că: $l_1=\dfrac{f(0)-f(1)}{2}=\dfrac{1}{2}$ şi $l_2=\dfrac{f(0)-f(1)}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Teorema 1 poate fi extinsă şi la un interval $[a,b]$ astfel:

Teorema 2. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), cu derivata continuă şi mărginită pe (a,b), atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=\frac{f(a)-f(b)}{2}.$$

Aplicaţia 1. Să se arate că:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1\frac{\mathrm{arctg}x}{x}\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathrm{arctg}\frac{k}{n}\right]=\frac{4-\pi}{8};$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{arcsin}x}{x}\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathrm{arcsin}\frac{k}{2n}\right]=\frac{6-\pi}{24};$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\mathrm{tg}\frac{k\pi}{4n}\right)-\frac{1}{2}\ln 2\right]=\frac{\ln 2}{2}.$

Soluţie. a) Fie funcţia $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0;\end{cases}$ f este continuă pe $[0,1]$ şi, pentru orice $x\in(0,1)$ $f'(x)=\dfrac{x-(1+x^2)\mathrm{arctg}x}{x^2(1+x^2)}$. Rezultă că f este derivabilă pe $(0,1)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=0$, rezultă că f satisface condiţiile Teoremei 1. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1\frac{\mathrm{arctg}x}{x}\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathrm{arctg}\frac{k}{n}\right]=$$
$$=\frac{f(0)-f(1)}{2}=\frac{4-\pi}{8}.$$

b) Fie funcţia $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{arcsin}x}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0;\end{cases}$ f este continuă pe $[0,1]$ şi, pentru orice $x\in(0,1)$, $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{arcsin}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Rezultă că f este derivabilă pe $(0,1)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=0$, rezultă că f satisface condiţiile Teoremei 1 şi are loc egalitatea din enunţ.

c) Calculăm $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$. Facem schimbarea de variabilă $t=\dfrac{\pi}{4}-x$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Dacă $x=0$ rezultă $t=\dfrac{\pi}{4}$, dacă $x=\dfrac{\pi}{4}$ rezultă $t=0$, de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln2-\ln(\mathrm{tg}x+1)\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{\pi}{4}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x.$$

Aşadar, $I=\dfrac{\pi}{8}\ln2$. Aplicând teorema 2 funcţiei $f:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\mathrm{tg}x)$, are loc egalitatea din enunţ.

Teorema 3. *Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, cu derivată monotonă şi mărginită pe $(0,1)$, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

Demonstraţie. Fie diviziunea $\Delta_n=\left(0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<\ldots<\dfrac{n}{n}=1\right)$ a intervalului $[0,1]$ cu norma $\|\Delta_n\|=\dfrac{1}{n}$ şi, de asemenea, considerăm şirul $(a_n)_{n\geq1}$ definit prin

$a_n=n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}x$, pentru orice $n\geq1$. Atunci limita din enunţul teoremei este $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Conform teormei lui Lagrange, pentru orice $k=\overline{1,n}$ şi orice $x\in\left(\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$, există $\xi_k\in\left(x,\dfrac{k}{n}\right)$ astfel încât

$f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f'(\xi_k) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)$ şi $a_n = n \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x.$

Deoarece $\xi_k \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, conform ipotezei, pentru orice $k = \overline{1,n}$ avem $f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f'(\xi_k) \leq f'\left(\frac{k}{n}\right)$. Înmulţind aceste inegalităţi cu $\left(x - \frac{k}{n}\right)$, obţinem că, pentru orice $k = \overline{1,n}$:

$$f'\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \leq f'(\xi_k) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \leq f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right),$$

adică

$$f'\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Rezultă că:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x,$$

adică:

$$f'\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}.$$

Deci, pentru orice $k = \overline{1,n}$:

$$-\frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{d}x \leq -\frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Însumând aceste ultime inegalităţi, obţinem:

$$-\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{d}x \leq -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right),$$

adică $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq a_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$. Deoarece $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$ şi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$ sunt sume Riemann asociate funcţiei f', diviziunii Δ_n şi sistemelor de puncte intermediare $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$, respectiv $\left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right)$, iar f' este integrabilă pe $[0,1]$, prin trecere la limită în ultimele inegalităţi obţinem: $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq -\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$, adică $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{f(0)-f(1)}{2}$.

Teorema 4. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), cu derivată monotonă şi mărginită pe (a,b), atunci:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=\frac{f(a)-f(b)}{2}.$$

Aplicaţia 2. Să se arate că:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}-1\right)=\frac{\mathrm{e}}{2}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\mathrm{arctg}\frac{k}{n}-\frac{\pi-2}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$.

c) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right]$$

(Concurs de titularizare 2001, [2])

Soluţie. a) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\mathrm{e}^x$. Pentru orice $x\in(0,1)$ rezultă $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$, care este crescătoare pe $(0,1)$ şi

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1.$$

Funcţia f îndeplineşte condiţiile teoremei 3 şi avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\right)=\frac{f(0)-f(1)}{2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

b) Funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\mathrm{arctg}x$ îndeplineşte condiţiile teoremei 3 şi avem

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\mathrm{arctg}x-x\right]\Big|_0^1=\frac{\pi-2}{4}.$$

c) Aplicând teorema 3 funcţiei f, deducem că limita cerută este

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

Observaţie 2. În enunţurile teoremelor 1, 2, 3, 4 condiţiile "f să fie continuă" şi f să fie derivabilă cu derivata mărginită pe $(0,1)$, respectiv (a,b) sunt esenţiale. Dacă aceste ipoteze nu sunt îndeplinite, atunci concluziile teoremelor pot să nu aibă loc. De exemplu, să luăm funcţia $f:[0,1][\to\mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 2, & x = 1. \end{cases}$. Această funcţie nu este continuă pe $[0,1]$ şi $\frac{f(0)-f(1)}{2} = -1$.

Dar:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n} + 2\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}.$$

Bibliografie

[1] Alexandrescu, C. şi col. *Ghid de pregătire pentru Examenul de Bacalaureat la Matematică, 2007*, Editura Sigma, Bucureşti, 2006.

[2] Andrei, Gh. şi col. *Admiterea 2001 şi bacalaurat*, Editura Gil, Zalău, 2001

[3] Lupşa, L. şi Blaga, L. *Analiză matematică, Note de curs 1*, Presa Universitară Clujeană, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2003

[4] Sireţchi, Gh. *Calcul diferenţial şi integral, Vol. I, Noţiuni fundamentale*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

Elementary School Vurpăr, Sibiu
Romania
E-mail : Leonblenche@yahoo.co.uk