Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006), 3-10

Biraportul în geometria triunghiului [1]

Vasile Berghea

Abstract

In this paper we present an interesting theorem of triangle geometry which has applications in colinear points, straight lines concurrence and geometrical locus.

2000 Mathematical Subject Classification: 51M04

Noţiunea de biraport este fundamentală în geometria proiectivă şi are aplicaţii interesante în geometria triunghiului dintre care vom prezenta şi noi câteva în această lucrare. Scopul este să demonstrăm o teoremă şi să arătăm cât de folositoare este în rezolvarea unor probleme de coliniaritate, de concurenţă, de stabilire a unor locuri geometrice, etc. Pentru început prezentăm câteva elemente pregătitoare care să uşureze înţelegerea ei de către cititor şi care să aşeze teorema în cadrul cel mai potrivit al geometriei.

1 Definiţie

Fiind date punctele coliniare A, B, C, D, se notează cu $(A, B; C, D)$ şi se numeşte **biraport** *sau* **raport anarmonic** *numărul:*

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}.$$

[1] *Received 1 December, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 15 December, 2006

Coliniaritatea punctelor este necesară pentru ca rapoartele din definiţie să fie formate cu vectori coliniari.

2 Identitatea lui Euler

Oricare ar fi punctele A, B, C, D în spaţiu avem:

(1) $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

Pentru demonstraţie se foloseşte exprimarea unui vector $\overrightarrow{XY}$ în funcţie de vectorii de poziţie $\overrightarrow{r_X}$, $\overrightarrow{r_Y}$ ai punctelor X şi Y într-un reper dat: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{r_Y} - \overrightarrow{r_X}$. Obţinem astfel relaţia:

$$(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A})(\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A})(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A})(\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B})$$

care se verifică imediat.

În cazul când punctele A, B, C, D sunt coliniare şi distincte identitatea lui Euler poate fi scrisă sub o formă particulară care ne interesează în mod special în lucrarea de faţă şi anume:

(1′) $$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} + \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{CD}} = 1$$

sau folosind notaţia din definiţie:

(1″) $$(A, B; C, D) + (A, C; B, D) = 1.$$

Subliniem că (1), (1′) şi (1”) sunt forme diferite ale identităţii lui Euler în situaţia când punctele A, B, C, D sunt coliniare şi distincte. Cele două birapoarte din (1”) diferă unul de celălalt prin faptul că punctele centrale sunt inversate. Relaţia (1”) dă una din proprietăţile biraportului. Studiul complet al acestora îl puteţi găsi în lucrarea [1]. În G.M. nr.7-8/1987 am publicat problema 21156, o formă particulară a teoremei din următorul paragraf:

3 Teoremă

Fie A, B, C, M puncte diferite în plan astfel încât $BM \cap AC = \{E\}$, $CM \cap AB = \{F\}$, iar P şi Q sunt situate pe dreptele AB, respectiv AC. Are loc *echivalenţa*:

(2a) $$M \in PQ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}} + \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = 1.$$

Comentariu. Relaţia precedentă mai poate fi scrisă sub următoarele forme echivalente:

$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} : \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} + \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} : \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{CQ}} = 1$ (2′) sau $(A, B; F, P) + (A, C; E, Q) = 1$ (2”).

Este evidentă analogia dintre (1”) şi (2”). Cu toate acestea ele diferă esenţial deoarece în (1”) punctele birapoartelor sunt aceleaşi pe când în (2”) sunt diferite. Egalitatea (2a) din enunţul teoremei este, din punct de vedere didactic şi al scopului urmărit, mai utilă decât (2”) aşa după cum vom vedea mai târziu în aplicaţii.

Pentru demonstraţia directă considerăm $M \in PQ$ şi aplicăm teorema lui Menelaus în ΔACF mai întâi transversalei $M - Q - P$ apoi transversalei $M - E - B$. Avem succesiv:

$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{CQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{FP}}{\overrightarrow{AP}} = 1$; $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{FP}}{\overrightarrow{AP}}$ (3).Analog $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = \frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{CM}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{FB}}$ (4).

Înmulţind (3) cu (4) membru cu membru se obţine: $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{FP}}{\overrightarrow{AP}}$ echivalentă cu relaţia următoare $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} : \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{CQ}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{FB}} : \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{FP}}$ sau încă $(A, C; E, Q) = (A, F; B, P)$.

Deoarece punctele A, B, F, P sunt coliniare putem scrie conform cu (1”) că $(A, B; F, P) + (A, F; B, P) = 1$ (am schimbat punctele centrale!). În această egalitate înlocuim al doilea biraport cu $(A, C; E, Q)$ pentru că sunt egale dupa cum am văzut mai sus şi găsim:

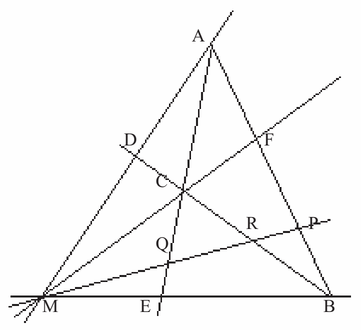

Fig.1

$(A, B; F, P) + (A, C; E, Q) = 1$, adică (2") care este echivalentă cu (2a) şi demonstraţia directă se încheie.

Reciproc, vom considera (2a) adevărată şi $M \notin PQ$. Notăm $AC \cap MP = \{Q'\}$ şi în conformitate cu teorema directă avem $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}} + \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ'}}{\overrightarrow{AQ'}} = 1$.

De aici şi din (2a) deducem că $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = \frac{\overrightarrow{CQ'}}{\overrightarrow{AQ'}}$ adică $Q = Q'$ şi teorema este demonstrată complet.

Concluzia 1. Notând cu $\{D\} = AM \cap BC$ şi R un punct pe BC avem prin analogie:

(2b) $\quad M \in PR$ echivalent cu $\frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{AF}} \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} + \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{BR}} = 1$ şi

(2c) $\quad M \in QR$ echivalent cu $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{BD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}} + \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{AE}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{CQ}} = 1$.

Concluzia 2. Dacă punctele P, Q, R sunt coliniare şi una din relaţiile (2a),(2b),(2c) este adevărată, atunci şi celelalte două sunt adevărate.

Concluzia 3. Teorema dată este o generalizare a teoremei Van Aubel. Într-adevăr când $PQ \parallel BC$ avem $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}} = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{AM}}$ care înlocuite în (2a) ne dau:

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} \cdot \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{AM}} + \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{AM}} = 1$$

şi de aici prin înmulţire cu $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{DM}}$ rezultă $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} + \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{DM}}$ q.e.d.

Concluzia 4. Dacă într-un triunghi ABC avem pe dreptele AB, AC, BC punctele P, Q, respectiv R astfel încât să fie adevărate două din relaţiile (2a),(2b),(2c), atunci P, Q şi R sunt coliniare. Avem astfel o metodă de demonstrare a unor probleme de coliniaritate!

Concluzia 5. Dacă în (2a) luăm E şi F fixe atunci $BE \cap CF = \{M\}$ este fix, P şi Q variabile, iar din $M \in PQ$ deducem că dreptele PQ au un punct fix M. Avem astfel o metodă de rezolvare a unor probleme de punct fix sau de concurenţă a unor drepte! Vezi problema nr. 20937 din G.M. 11-12/1986.

Concluzia 6. Dacă în (2a) P şi Q sunt fixe, iar E şi F variabile, atunci punctul variabil $\{M\} = BE \cap CF$ este situat pe dreapta fixă PQ întrucât $M \in PQ$. Prin urmare locul geometric al punctului M este dreapta PQ. Teorema ne dă, iată, şi o metodă de rezolvare a unor probleme de loc geometric! Vezi problema nr. 22385 din G.M. 6/1991.

Caracterul de teoremă al echivalenţei (2a) este pus în evidenţă de concluziile 1-6 date mai sus.

4 Aplicaţii

Vom prezenta în continuare câteva forme particulare ce se obţin din (2a), (2b) şi (2c) atunci când M este unul din punctele remarcabile ale ΔABC şi care au constituit de-a lungul timpului subiecte pentru diverse probleme publicate în G.M. sau subiecte pentru note matematice.

4.1. Studiem pentru început cazul $M = G$, unde G este centrul de greutate al ΔABC. Evident $G \in \mathrm{Int}\Delta ABC$ şi două din punctele P, Q, R sunt pe laturi, iar unul în exterior. Alegem pentru analiză situaţia din fig.2 când $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ şi $R \in BC - [BC]$. În cazul acesta (AD), (BE), (CF) sunt mediane deci:

(4.1.1) $$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -1.$$

Avem de asemenea

(4.1.2) $$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}} = -\frac{PB}{PA}; \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}} = -\frac{QC}{QA}; \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}} = \frac{RB}{RC},$$

semnele fiind determinate de orientarea vectorilor din fiecare raport. Înlocuind aceste valori în (2a),(2b),(2c) găsim:

(4.1.a) $$G \in PQ \text{ echivalent cu } \frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = 1,$$

(4.1.b) $$G \in PR \text{ echivalent cu } \frac{PA}{PB} - \frac{RC}{RB} = 1,$$

(4.1.c) $$G \in QR \text{ echivalent cu } \frac{QA}{QC} - \frac{RB}{RC} = 1.$$

Dacă (4.1.a) este un rezultat foarte cunoscut devenind folclor matematic, relaţiile (4.1.b) şi (4.1.c) sunt rar folosite cu toate că sunt înrudite cu acesta.

4.2. Studiem cazul $M = I$, I fiind centrul cercului înscris în ΔABC. Avem $I \in \text{Int}\Delta ABC$ şi alegem spre analiză situaţia anterioară: $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ şi $R \in BC - [BC]$. Acum (AD), (BE), (CF) sunt bisectoare şi din teorema bisectoarei se poate scrie:

(4.2.1) $$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = -\frac{b}{a}; \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = -\frac{c}{a}; \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{c}{b},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor ΔABC. Rapoartele $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}}, \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}}, \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}}$ vor avea aceleaşi valori ca în (4.1.2). Înlocuind valorile din (4.2.1) şi (4.1.2) în (2a), (2b), (2c), se obţine:

(4.2.a) $I \in PQ$ echivalent cu $b \cdot \frac{PB}{PA} + c \cdot \frac{QC}{QA} = a$;

(4.2.b) $I \in PR$ echivalent cu $wa \cdot \frac{PA}{PB} - c \cdot \frac{RC}{RB} = b$;

(4.2.c) $I \in QR$ echivalent cu $a \cdot \frac{QA}{QC} - b \cdot \frac{RB}{RC} = c.$

Echivalenţa (4.2.a) este problema nr. 17829 din G.M. 7/1979 autor Stelian Mihalaş, reluată într-o formulare deosebită sub nr. 19537 în G.M. 1/1983, autor Gh. Mitroaica.

4.3. Pentru $M = H$, H ortocentrul ΔABC avem de analizat două situaţii:

a) $H \in \text{Int}\Delta ABC$ şi b) $H \in \text{Ext}\Delta ABC$.

În cazul a) ΔABC este ascuţitunghic şi vom lua ca în (4.1) $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ şi $R \in BC - [BC]$. (AD), (BE), (CF) sunt înălţimi şi din triunghiurile dreptunghice ADB şi ADC obţinem:

(4.3.1) $$\text{tg}B = \frac{AD}{BD}, \text{tg}C = \frac{AD}{CD}$$

din care rezultă: $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{\text{tg}C}{\text{tg}B}$ şi analog $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = -\frac{\text{tg}B}{\text{tg}A}; \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = -\frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}.$

Rapoartele $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}}, \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}}, \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}}$ vor avea aceleaşi valori ca în (4.1.2). Înlocuind (4.3.1) şi (4.1.2) în (2a), (2b), (2c) se obţine:

(4.3.a) $H \in PQ$ echivalent cu $\frac{PB}{PA} \cdot \text{tg}B + \frac{QC}{QA} \cdot \text{tg}C = \text{tg}A$, adică problema nr. 21047 din G.M. 3/1987;

(4.3.b) $\quad H \in PR$ echivalent cu $\dfrac{PA}{PB} \cdot \mathrm{tg}A - \dfrac{RC}{RB} \cdot \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}B$;

(4.3.c) $\quad H \in QR$ echivalent cu $\dfrac{QA}{QC} \cdot \mathrm{tg}A - \dfrac{RB}{RC} \cdot \mathrm{tg}B = \mathrm{tg}C$.

b) $H \in \mathrm{Ext}\Delta ABC$. Triunghiul este obtuzunghic şi sunt posibile următoarele situaţii:

i) două din punctele P, Q, R sunt pe laturi şi unul în exterior (variantă analoagă precedentelor deci n-o mai analizăm);

ii) toate cele trei puncte P, Q, R sunt în exteriorul laturilor. Considerăm $m(\widehat{C}) > 90°$. Din ΔADC şi ΔADB obţinem: $\mathrm{tg}(\pi - C) = \dfrac{AD}{CD}$ echivalent cu $-\mathrm{tg}C = \dfrac{AD}{CD}$ şi $\mathrm{tg}B = \dfrac{AD}{BD}$, iar de aici se deduce că $\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}B}$; şi analog $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = -\dfrac{\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A}$; $\dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = -\dfrac{\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}A}$. Rapoartele găsite sunt identice cu cele din (4.3.1) însă acum $\mathrm{tg}C < 0$ deci două din ele sunt pozitive iar unul este negativ. Pentru $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}}, \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}}, \dfrac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}}$ avem numai valori pozitive întrucât vectorii aceluiaşi raport au acelaşi sens. După înlocuire în (2a), (2b), (2c) şi înmulţire cu (-1) găsim:

(4.3.a′) $\quad H \in PQ$ echivalent cu $\dfrac{PB}{PA} \cdot \mathrm{tg}B + \dfrac{QC}{QA} \cdot \mathrm{tg}C = -\mathrm{tg}A$;

(4.3.b′) $\quad H \in PR$ echivalent cu $\dfrac{PA}{PB} \cdot \mathrm{tg}A + \dfrac{RC}{RB} \cdot \mathrm{tg}C = -\mathrm{tg}B$;

(4.3.c′) $\quad$ şi $H \in QR$ echivalent cu $\dfrac{QA}{QC} \cdot \mathrm{tg}A + \dfrac{RB}{RC} \cdot \mathrm{tg}B = -\mathrm{tg}C$.

4.4. Analizăm şi cazul $M = O$, O fiind centrul cercului circumscris ΔABC. Ca în exemplul anterior putem avea:

a) $O \in \mathrm{Int}\Delta ABC$ sau b) $O \in \mathrm{Ext}\Delta ABC$.

a) Avem $m(\widehat{AOC}) = 2B$; $m(\widehat{BOC}) = 2A$ şi

(4.4.1) $$\frac{AF}{BF} = \frac{\sigma(FOA)}{\sigma(FOB)} = \frac{1/2 \cdot OA \cdot OF \cdot \sin(\pi - 2B)}{1/2 \cdot OB \cdot OF \cdot \sin(\pi - 2A)} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}.$$

Atunci $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{BF}} = -\dfrac{\sin 2B}{\sin 2A}$ şi analog se obţin:

$\dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = -\dfrac{\sin 2C}{\sin 2A}$; $\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{\sin 2C}{\sin 2B}$. Pentru $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}}$, $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}}$, $\dfrac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CR}}$ rămân valabile valorile din (4.2.1). După înlocuire în (2a), (2b), (2c) avem:

(4.4.a) $\quad O \in PQ$ echivalent cu $\dfrac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \dfrac{QC}{QA} \cdot \sin 2C = \sin 2A$;

(4.4.b) $\quad O \in PR$ echivalent cu $\dfrac{PA}{PB} \cdot \sin 2A - \dfrac{RC}{RB} \cdot \sin 2C = \sin 2B$;

(4.4.c) $\quad O \in QR$ echivalent cu $\dfrac{QA}{QC} \cdot \sin 2A - \dfrac{RB}{RC} \cdot \sin 2B = \sin 2C$.

Echivalenţa (4.4.a) este problema 21046 din G.M. 3/1987.

b) Când $O \in \mathrm{Ext}\Delta ABC$ avem de analizat aceleaşi cazuri i) şi ii) de la punctul 4.3. Pentru i) găsim relaţii identice cu cele de mai sus, iar pentru ii) vom avea: $O \in PQ$ echivalent cu $\dfrac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \dfrac{QC}{QA} \cdot \sin 2C = -\sin 2A$ (4.4.a′) şi analoagele.

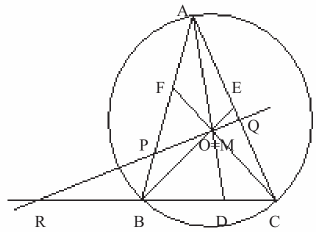

Fig.2.

Mai precizăm că problemele din această notă apărute în G.M., al căror autor n-a fost menţionat, sunt propuse de subsemnatul.

Bibliografie

[1] Vrănceanu Gh., *Geometrie analitică,proiectivă şi diferenţială*, Ed. did. şi ped.,1974.

[2] ***: *Gazeta matematică, seria B.*.

Liceul "Gh.Lazăr" Avrig, Sibiu
Str. Horea, nr. 15
555200 Avrig Romania