Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006),85-88

Asupra unei probleme de extrem [1]

Dumitru Acu

Abstract

In this note we obtain: if $x_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = \overline{1, n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ satisfy the conditions (1), then

$$\max_{i=\overline{1,n}} x_i = \frac{2(n-1)}{n+1} \text{ and } \max x_{n+1} = \frac{4n}{n+1}$$

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50, 26B29

1. În [1] este propusă Problema 2.71, pagina 26: *"Fie $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c+d+e = 8$ şi $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 16$. Să se găsească valoarea maximă a lui e".*

Prezentăm în continuare soluţia dată la această problemă în aceeaşi lucrare la pagina 56.

"Din enunţ rezultă $8 - e = a + b + c + d$ şi $16 - e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dar inegalitatea Cauchy-Buniakowski implică $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 \Leftrightarrow 4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2 \Leftrightarrow 64 - 4e^2 \geq 64 - 16e + e^2 \Leftrightarrow 5e^2 - 16e \leq 0 \Leftrightarrow e(5e - 16) \leq 0$. Din ultima inegalitate deducem că $0 \leq e \leq \dfrac{16}{5}$, deci maximul lui e este $\dfrac{16}{5}$. Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $a = b = c = d = e = \dfrac{16}{5}$."

[1] *Received 5 January, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 15 January, 2006

Se observă că pentru $a = b = c = d = e = \dfrac{16}{5}$ avem $a + b + c + d + e = 16 \neq 8$ şi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \dfrac{256}{5} \neq 16$, adică condiţiile din enunţ nu sunt verificate.

În această notă vom prezenta o generalizare a problemei însoţită de o soluţie completă.

2. Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă de extrem mai generală: *Fie* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n+1}$, *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 2n \text{ şi } \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 4n. \tag{1}$$

Să se găsească $\max\limits_{i=\overline{1,n+1}} x_i$.

Observăm că, ţinând seama de simetria condiţiilor (1), putem să aflăm mai întâi valoarea maximă a lui x_{n+1}, apoi a lui x_n şi aşa mai departe.

Acum, din (1) avem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n - x_{n+1} \tag{2}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4n - x_{n+1}^2. \tag{3}$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz obţinem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

de unde, utilizând (1) şi (2), găsim

$$(2n - x_{n+1})^2 \leq n(4n - x_{n+1}^2). \tag{4}$$

Efectuând calculele în (3), obţinem

$$(n+1)x_{n+1}^2 - 4nx_{n+1} \leq 0,$$

de unde deducem

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{4n}{n+1},$$

deci $\max x_{n+1} = \dfrac{4n}{n+1}$.

Revenim cu $x_{n+1} = \dfrac{4n}{n+1}$ în (2) şi (3) şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2n(n-1)}{n+1} \tag{5}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{4n(n-1)^2}{(n+1)^2}. \tag{6}$$

Datorită simetriei relaţiilor (5) şi (6) în x_i, $i = \overline{1,n}$, putem afla mai întâi $\max x_n$.

Procedăm ca mai sus. Avem:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{2n(n-1)}{n+1} - x_n \tag{7}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \frac{4n(n-1)^2}{(n+1)^2} - x_n^2. \tag{8}$$

Utilizăm din nou inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz şi avem

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2 \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2, \tag{9}$$

de unde, ţinând de (7) şi (8), găsim

$$\left(\frac{2n(n-1)}{n+1} - x_n\right)^2 \leq (n-1)\left(\frac{4n(n-1)^2}{(n+1)^2} - x_n^2\right),$$

care este echivalentă cu

$$\left(x_n - \frac{2(n-1)}{n+1}\right)^2 \leq 0.$$

Această inegalitate este posibilă dacă şi numai dacă $x_n = \dfrac{2(n-1)}{n+1}$. Mai mult, raţionamentul făcut ne arată că de fapt

$$x_i = \frac{2(n-1)}{n+1},\ i = \overline{1,n}.$$

Aşadar, am obţinut că:

$$\max_{i=\overline{1,n}} x_i = \frac{2(n-1)}{n+1} \text{ şi } \max x_{n+1} = \frac{4n}{n+1}.$$

Valorile găsite verifică condiţiile (1).

Observaţie. Pentru $n = 4$ obţinem Problema 2.71, caz în care egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $a = b = c = d = \dfrac{6}{5}$ şi $e = \dfrac{16}{5}$

Bibliografie

[1] Laurenţiu Panaitopol, Viorel Băndilă, Mircea Lascu, *Inegalităţi*, Ed. GIL, Zalău, 1995.

"Lucian Blaga" University of Sibiu
Faculty of Sciences
Department of Mathematics
Str. Dr. I. Raţiu, no. 5–7
550012 Sibiu - Romania
E-mail: acu_dumitru@yahoo.com