Educaţia Matematică Vol. 2, Nr. 1-2 (2006),33-38

Observaţii relative la seria armonică [1]

Dumitru Acu

Abstract

In this paper we present some remarks concerning harmonic series.

2000 Mathematical Subject Classification: 40C99

1. Seria armonică generalizată.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte **seria armonică**. Denumirea ei provine din faptul că, începând cu al doilea termen al seriei, fiecare termen al ei este media armonică a termenilor vecini:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}\,, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, poartă numele de **seria armonică generalizată** ([1], [2], [4], [5]).

Natura seriei depinde de α : *dacă* $\alpha > 1$ *seria este convergentă iar dacă* $\alpha \leq 1$ *este divergentă.*

[1] *Received 19 May, 2006*

Accepted for publication (in revised form) 23 May, 2006

Pentru demonstrarea acestui fapt există mai multe căi. Cea mai des folosită apelează la criteriul de comparaţie: *dacă* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *sunt două serii cu termeni pozitivi cu* $a_n \leq b_n$, $n \geq 1$, *atunci:*

i) dacă seria $\sum_{n\geq 1} b_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergentă;*

ii) dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *este divergentă.*

Pentru a putea aplica acest criteriu se grupează termenii seriei după $2^k \leq n < 2^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Astfel, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{1}{n^\alpha} .$$

Dacă $\alpha > 1$, atunci putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k .$$

Cum $0 < \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ pentru $\alpha > 1$, deducem că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ este convergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Dacă $\alpha \leq 1$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k .$$

Cum $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$ pentru $\alpha \leq 1$, rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ este divergentă, deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

Observaţia 1.1. *În demonstraţia de mai sus numărul 2 poate fi înlocuit cu orice* $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

Într-adevăr, pentru $\alpha > 1$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{b^k \leq n < b^{k+1}} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{b^k \leq n < b^{k+1}} \frac{1}{b^{k\alpha}} =$$

$$= (b-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{b^{k\alpha}} = (b-1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{k-1}} \right)^\alpha .$$

iar pentru $\alpha \leq 1$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \frac{b-1}{b^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} \right)^k .$$

Observaţia 1.2. Divergenţa seriei armonice $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ a fost stabilită prima dată de către Nicole d'Oresme ($\approx$ 1323–1382). Demonstraţia a fost rătăcită aproape trei secole ([5]). Rezultatul a fost obţinut din nou de către Pietro Mengoli în 1647, de Johann Bernoulli în 1687 şi de Jacob Bernoulli la scurt timp ([5]).

Seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{an+b}$, $a,\ b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, se numesc de asemenea serii armonice (Beyer, 1987, [5]).

2. Subserii ale seriei armonice.

În demonstraţia de mai sus faptul că $b^k \leq n < b^{k+1}$ poate fi interpretat astfel: se consideră toate numerele naturale n scrise în baza de numeraţie b cu $k+1$ cifre, adică

$$n = \overline{a_0 a_1 \ldots a_k}\ , \quad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}\ , \quad i = \overline{0, k}\ , \quad a_0 \neq 0.$$

Fie M mulţimea numerelor naturale n, $n \geq 1$, care nu conţin cifre c, $c \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, în scrierea lor în baza de numeraţie b, $b \geq 3$.

Teorema 1. *Seria* $\sum\limits_{n \in M} \frac{1}{n}$ *este convergentă.*

Demonstraţie.

Cazul 1. $c = 0$. Atunci $a_i \in \{1, 2, \dots, b-1\}$, $i = \overline{0, k}$ şi avem $(b-1)^{k+1}$ numere cuprinse între b^k şi b^{k+1}. Putem scrie

$$\sum_{n\in M} \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{b^k \le n < b^{k+1}} \frac{1}{n} \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n\in M} \frac{1}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-1)^{k+1}}{b^k} =$$

$$= (b-1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^k.$$

Cum $0 < \dfrac{b-1}{b} < 1$, rezultă că seria $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}^k\right)$ este convergentă deci şi seria $\displaystyle\sum_{n\in M} \frac{1}{n}$ este convergentă.

Cazul 2. $c \ne 0$. Atunci $c \in \{1, 2, \dots, b-1\}$, $a_0 \in \{1, 2, \dots, b-1\} - \{c\}$ şi $a_i \in \{0, 1, \dots, c-1, c+1, \dots, b-1\}$, $i = \overline{1, k}$. Rezultă că avem $(b-2)(b-1)^k$ numere naturale n cuprinse între b^k şi b^{k+1}. Atunci avem

$$\sum_{n\in M} \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{b^k \le n < b^{k+1}} \frac{1}{n} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-2)(b-1)^k}{b^k} = (b-2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^k,$$

cu $0 < \dfrac{b-1}{b} < 1$, de unde rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^k$ este convergentă. Deci, seria $\displaystyle\sum_{n\in M} \frac{1}{n}$ este convergentă.

Observaţia 2.1. Pentru $b = 10$ şi $c = 9$ din Teorema 1 rezultă o problemă propusă la Olimpiada Internaţională de Matematică în 1975 ([4]).

Observaţia 2.2. Din demonstraţia de la Cazul 1 rezultă că dacă scriem numerele naturale n în baza 2 şi eliminăm pe cele care conţin cifra 0, atunci seria $\sum \frac{1}{n}$, suma relativă numai la aceste numere, este convergentă. Adică, seria

$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ori}}} + \cdots ,$$

unde $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ori}}$ sunt scrise în baza de numeraţie 2, este convergentă.

Observaţia 2.3. Dacă $a \geq 2$, subseria $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{a^n}$ a seriei armonice este convergentă, fiind serie geometrică cu raţia $0 < \frac{1}{a} < 1$.

Observaţia 2.4. Subseria $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, a seriei armonice este convergentă deoarece $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \leq 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{\text{n-1 ori}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ dacă $n \geq 2$.

3. Funcţia Zeta a lui Riemann.

Dacă α este un număr real $\alpha > 1$, atunci suma seriei armonice generalizate se notează cu $\zeta(\alpha)$ şi se numeşte *funcţia* ζ *a lui Riemann.*

În scopul estimării numărului numerelor prime inferioare unui număr real dat, Bernhard Riemann (n. 17.09.1826 - m. 20.02.1866) a extins mai întâi definiţia funcţiei zeta în semiplanul complex $\sigma > 1$:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} , \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma, t \in \mathbb{R} .$$

Apoi, funcţia ζ a fost extinsă la întreg planul complex. Aceasta are zerourile triviale $z = -2n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Zerourile netriviale ale funcţiei zeta sunt toate conţinute în banda $0 \leq \sigma \leq 1$, numită *banda critică* a funcţiei ζ şi ele sunt aşezate simetric în raport cu axa reală $t = 0$ şi în raport cu axa critică $\sigma = \frac{1}{2}$ ([3]).

Repartiţia zerourilor funcţiei ζ în banda critică este legată de *legea distribuţiei asimptotice a numerelor prime. Aceasta afirmă că* $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$, *unde* $\pi(x)$ *este numărul numerelor prime care nu depăşesc numărul real* $x > 0$.

În 1859 Riemann a emis ipoteza că: *zerourile netriviale ale funcţiei* ζ *sunt situate pe axa critică* $\sigma = \frac{1}{2}$.

Aceasta este una din marile probleme deschise ale matematicii. Un răspuns parţial important a dat Hardy în 1914 când a demonstrat că *există o infinitate de zerouri ale funcţiei* ζ *pe axa critică* $\sigma = \frac{1}{2}$.

În teoria analitică a numerelor un rol important îl are *identitatea lui Euler*

$$\zeta(\alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} \quad , \quad \alpha > 1 \ ,$$

unde p parcurge mulţimea numerelor prime.

Bibliografie

[1] Andrei Browder, *Mathematical analysis. An Introduction*, Springer Verlag, 1996.

[2] Constantin P. Niculescu, *Fundamentele analizei matematice. Analiza pe dreaptă reală*, Editura Academiei Române, 1996.

[3] Romulus Cristescu (coordonator) ş.a., *Dicţionar de analiză matematică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

[4] Laurenţiu Panaitopol, Alexandru Ghica, *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare*, Editura GIL, 2006.

[5] Anca Precupeanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1996.

[6] Eric Weisstein, *Harmonic series*, Wolfram Math World the web′s most extensive mathematics resurce.

”Lucian Blaga” University of Sibiu
Faculty of Sciences
Department of Mathematics
Str. Dr. I. Raţiu, no. 5–7
550012 Sibiu - Romania
E-mail: acu_dumitru@yahoo.com