**Educaţia Matematică Vol. 1, No. 2 (2005), 79–84**

# O condiţie de convergenţă a unor şiruri

Didina Maria Secelean

**Abstract**

In this paper we present a necessary and sufficient condition to convergence of some real sequences. More exactly, an sequence is convergent if and only if certain its subsequences converge. Also we give an application.

**2000 Mathematical Subject Classification:** 97D40

Este foarte cunoscută proprietatea că un şir are limită atunci şi numai atunci când orice subşir al său are o aceeaşi limită. Teorema următoare arată că este suficient să considerăm doar anumite subşiruri, generalizând astfel un rezultat des utilizat în probleme.

**Teorema 1.** *Un şir de numere reale* $(x_n)_n$ *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă şi numai dacă există o familie finită* $(I_k)_{k=1}^N$ *de mulţimi infinite de numere naturale astfel încât* $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ *iar subşirurile* $(x_n)_{n\in I_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ *să aibă limita* $l$.

**Demonstraţie.** Necesitatea este evidentă.

Pentru a demonstra suficienţa, să presupunem întâi că $l \in \mathbb{R}$ (adică subşirurile $(x_n)_{n \in I_k}$, $k = 1, 2, \dots, N$ sunt convergente) şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru fiecare $k = 1, 2, \dots, N$, există $n_{\varepsilon k} \in I_k$ astfel încât

$$n \in I_k,\ n \geq n_{\varepsilon k} \ \Rightarrow\ x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Fie $n_\varepsilon = \max\limits_{1 \leq k \leq N} n_{\varepsilon k}$ şi $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci există $k_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ astfel încât $n \in I_{k_n}$ şi deci $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Rezultă $\lim\limits_n x_n = l$.

Presupunem acum că $l = \infty$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, există $n_{\varepsilon k} \in I_k$ astfel încât

$$n \in I_k,\ n \geq n_{\varepsilon k} \ \Rightarrow\ x_n > \varepsilon.$$

Luând $n_\varepsilon = \max\limits_{1 \leq k \leq N} n_{\varepsilon k}$ şi $n \geq n_\varepsilon$ deducem că există $k_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ astfel încât $n \in I_{k_n}$ şi deci $x_n > \varepsilon$.

Rezultă $\lim\limits_n x_n = l$.

Cazul $l = -\infty$ se tratează analog.

Observaţie. Condiţia ca familia de subşiruri din teorema precedentă să fie finită este esenţială după cum rezultă din următorul contraexemplu:

Considerăm şirul numerelor raţionale strict pozitive

$$1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{2}{1}\,,\ \frac{3}{1}\,,\ \frac{2}{2}\,,\ \dots$$

organizat după schema următoare (a lui Cauchy):

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Acest şir nu are, evident, limită: este suficient să observăm că admite două subşiruri cu limite diferite:

$$1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots \to 1;$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \to 0.$$

Admite totuşi o familie infinită de subşiruri care tind către o aceeaşi limită, de exemplu, pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots$, subşirul $(\frac{k}{n})_n$ converge la 0.

Din teorema precedentă se desprinde imediat caracterizarea corespunzătoare pentru şirurile convergente.

**Corolarul 1.** *Un şir $(x_n)_n$ de numere reale este convergent şi are limita $l$ dacă şi numai dacă există mulţimile infinite de numere naturale $I_1$, $I_2$, $\ldots, I_N$ astfel încât $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ iar subşirurile $(x_n)_{n \in I_k}$ să fie convergente cu limita $l$.*

**Corolarul 2.** *Un şir de $(x_n)_n$ de numere reale are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă există mulţimile de numere naturale $I_1$, $I_2$, $\ldots, I_N$ cu proprietăţile:*

a) $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$,

b) *mulţimea* $I_1 \cap I_k$ *este infinită pentru orice* $k \in \{1, 2, \ldots N\}$,

c) *subşirurile* $(x_n)_{n \in I_k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, *au limită.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra doar suficienţa.

Să arătăm întâi că, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, subşirurile $(x_n)_{n \in I_k}$ au aceeaşi limită.

Fie $l = \lim\limits_{n \in I_1} x_n$ şi fie $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Atunci, ţinând cont de ipoteza b) şirurile $(x_n)_{n \in I_1}$ şi $(x_n)_{n \in I_k}$ au drept subşir pe $(x_n)_{n \in I_1 \cap I_k}$.

Rezultă că $\lim\limits_{n \in I_1 \cap I_k} = l$ iar, cum şirul $(x_n)_{n \in I_k}$ are limită, deducem că $\lim\limits_{n \in I_k} = l$.

De aici aplicăm teorema.

**Lema 1.** *Considerăm două numere naturale nenule* $p$, $q$ *prime între ele şi* $k \in \mathbb{N}$. *Atunci există o infinitate de numere naturale* $n$ *cu proprietatea că*

$$qn + k \vdots p.$$

**Demonstraţie.** Afirmaţia rezultă din teoria ecuaţiilor diofantiene (a se vedea de ex. teorema 7.2.1. şi propoziţia 7.2.1. din [1]). Vom prezenta, aici, o demonstraţie directă.

Dacă $p = 1$ sau $q = 1$ afirmaţia este evidentă. Presupunem, aşadar, $p \geq 2$ şi $q \geq 2$.

De aici şi din faptul că numerele $p$ şi $q$ sunt prime între ele, deducem[1] că există numerele întregi nenule $u$, $v$ astfel încât $pu + qv = 1$ ceea ce este echivalent cu $q = \dfrac{1 - pu}{v}$.

[1] a se vedea de ex. [3]

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ arbitrar cu $m \geq \dfrac{k+1}{p} \Leftrightarrow pm - k \geq 1$, luăm

$$n := |v|pm - vk.$$

Numărul $n$ este, evident, natural şi avem :

$$qn + k = \frac{1-pu}{v} \cdot (|v|pm - vk) + k = \operatorname{sign} v \cdot pm - \operatorname{sign} v \cdot p^2 um + puk \,\vdots\, p.$$

Cum numărul $m$ a fost ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de valori ale lui $n$ care îndeplinesc condiţia din enunţ.

**Aplicaţie.** *Se consideră un şir $(x_n)_n$ de numere reale şi presupunem că există numerele naturale nenule prime între ele $p$ şi $q$ cu proprietatea că subşirurile*

$$(x_{pn})_n,\ (x_{qn})_n,\ (x_{qn+1})_n,\ \ldots,\ (x_{qn+q-1})_n$$

*au limită. Atunci şirul $(x_n)_n$ are limită.*

**Soluţie.** Observăm că, notând $I_k := \{qn + k - 1/\ n = 1, 2, \ldots\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, avem

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{q} I_k.$$

Apoi, dacă notăm $I_0 := \{pn/\ n = 1, 2, \ldots\}$, utilizând lema precedentă, deducem că mulţimea $I_0 \cap I_k$ este infinită pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

De aici şi din teorema de mai sus rezultă că $(x_n)_n$ are limită (această limită fiind chiar valoarea comună a limitelor subşirurilor $(x_n)_{n \in I_k}$, $k = 0, 1, \ldots, q$).

Iată un exemplu de aplicare concretă a rezultatului demonstrat în aplicaţia anterioară.

Exemplu. *Fie şirul de numere reale $(x_n)_n$ şi presupunem că subşirurile*

*$(x_{2n})_n$, $(x_{3n})_n$, $(x_{3n+1})_n$, $(x_{3n+2})_n$ sunt convergente. Atunci şirul dat este convergent, limita sa fiind egală cu valoarea comună a limitelor subşirurilor considerate.*

## Bibliografie


[1] Acu D., *Aritmetică şi teoria numerelor*, Ed. Univ. "Lucian Blaga" din Sibiu, 1999

[2] Becheanu M. ş.a., *Algebră pentru perfecţionarea profesorilor*, E.D.P., Bucureşti, 1983

[3] Ion D.I., Radu N., *Algebră*, E.D.P., Bucureţi, 1981

[4] Sireţchi Gh., *Analiză Matematică*, vol. 1, Ed. Şt. şi Encicl., Bucureşti, 1985



Şcoala cu clasele I-VIII
Cristian, Str. V, nr. 8
jud. Sibiu, România
E-mail: *didinasecelean@yahoo.com*