Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 2 (2005), 49–58

Aranjamente generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we propose a generalization of the arrangement notion. We give the generalized arrangements definition and we present the issue of distributing the objects into cells. We also present two recurrence relations concerning the generalized arrangements.

Next, we develope a general method for the generalized arrangementsalculation: the Newton type polynomials method.
In the end of the paper we propose three applications and we indicate the references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, în aranjamentele simple de m obiecte luate câte k, orice obiect apare cel mult câte o singură dată, pe când în cazul aranjamentelor cu repetiţie orice obiect se poate repeta, de maximum k ori.

În cele ce urmează vom considera cazul general, când obiectul i se poate repeta de maximum l_i ori, unde $1 \leq l_i \leq k$ (i = 1, 2,..., m) [2].

2 Definiţie

Prin aranjamente generalizate de n obiecte $(l_1, l_2, ..., l_m)$ luate câte k înţelegem submulţimile ordonate conţinând k obiecte diferite sau identice care se pot forma pe rând din cele $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$ obiecte (m clase de obiecte, din clasa i având l_i obiecte identice).

Numărul aranjamentelor generalizate de n obiecte $(l_1, l_2, ..., l_m)$ luate câte k se notează cu:

$$A^k_{n\ (l_1,l_2,...,l_m)}.$$

Trebuie evident să avem: $n \geq k$ şi $1 \leq l_i \leq k \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Prin particularizare se regăsesc aranjamentele simple şi cele cu repetiţie:

$$A^k_{n\ (1,1,...,1)} = A^k_m \quad (m = n)$$

$$A^k_{n\ (k,k,...,k)} = a^k_m \quad (mk = n).$$

Exemplu. Să considerăm aranjamentele de 7 obiecte (3, 3, 1) luate câte 3.

Obiectele sunt: 1 1 1 2 2 2 3.

Construind sistematic aranjamentele generalizate, obţinem următoarea listă:

111; 112; 113; 121; 122; 123; 131; 132; 211; 212;

213; 221; 222; 223; 231; 232; 311; 312; 321; 322.

Lista conţine 20 de poziţii, deci, prin enumerare am obţinut rezultatul:

$$A^3_{7\ (3,3,1)} = 20.$$

Cazuri particulare:

Pentru cazurile particulare $k = 0, k = 1, k = n - 1$ şi $k = n$, numărul aranjamentelor generalizate se determină cu ajutorul următoarelor formule, care rezultă imediat din definiţie:

$$A^0_{n\ (1_1,1_2,...,1_m)} = 1$$

$$A^1_{n\ (1_1,1_2,...,1_m)} = m$$

$$A^{n-1}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}$$

$$A^n_{n\ (1_1,1_2,...,1_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}.$$

3 Problema distribuirilor

Vom considera în continuare o problemă de distribuire a unor obiecte in căsuţe. Căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult l_i obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea l_i.

Problemă: Considerăm k obiecte diferite şi m căsuţe de capacităţi $l_i(i = 1, 2, ..., m)$. Se distribuie cele k obiecte diferite în cele m căsuţe. În câte moduri se poate face distribuirea?

Vom arăta că numărul de distribuiri posibile este:

$$A^k_{n\ (l_1,l_2,...,l_m)}$$

Să considerăm la început un caz particular cu interpretările conform definiţiei şi problemei distribuirilor:

$$A^2_{4\ (2,1,1)} = 7.$$

Definiţie.
Obiecte: 1123

11
12
13
21
31
23
32

Problema distribuirilor.
Obiecte: AB

AB		
A	B	
A		B
B	A	
B		A
	A	B
	B	A

După cum se observă, orice grupare poate fi interpretată ca indicând căsuţele în care se plasează obiectele A,B şi invers, orice distribuire în căsuţe determină o grupare. De exemplu, gruparea 21 arată că obiectul A se plasează în căsuţa 2 iar obiectul B în căsuţa 1, respectiv a patra distribuire în căsuţe conduce la gruparea 21.
Acest principiu se poate evident aplica pe cazul general, deci între submulţimile ordonate şi distribuirile în căsuţe există o corespondenţă biunivocă, ceea ce arată că ele au acelaşi număr de elemente.

4 Formule de recurenţă

Există următoarele formule de recurenţă, ale căror demonstraţii le propunem ca exerciţiu cititorului.
Formula de recurenţă I:

$$A_{n\ (l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = k! \sum_{R} \frac{1}{x_1!x_2!...x_m!}$$

unde $(x_1, x_2, ..., x_m)$ este o soluţie în numere naturale a ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \leq x_i \leq l_i, i = 1, 2, ..., m$.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm numărul $A^3_{7\ (3,3,1)}$.

Ecuaţia $x_1+x_2+x_3 = 3$, cu condiţiile $0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1$ are următoarele soluţii:

$$(0, 2, 1); (0, 3, 0); (1, 1, 1); (1, 2, 0); (2, 1, 0); (2, 0, 1); (3, 0, 0).$$

Deci:

$$A^3_{7\ (3,3,1)} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 20.$$

Formula de recurenţă II:

$$A^k_{n\ (1_1,1_2,...,1_m)} = A^k_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + C^1_k \cdot A^{k-1}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} +$$

$$+ C^2_k \cdot A^{k-2}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + ... + C^{l_m}_k \cdot A^{k-l_m}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})}$$

Suma din membrul drept are $l_m + 1$ termeni.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm acelaşi număr $A^3_{7\ (3,3,1)}$.

Obţinem:

$$A^3_{7\ (3,3,1)} = A^3_{6\ (3,3)} + C^1_3 \cdot A^2_{6(3,3)}$$

Utilizând una din metodele de calcul expuse în prezentul articol, obţinem:

$$A^3_{6\ (3,3)} = 8; \quad A^2_{6\ (3,3)} = 4$$

Deci:$A^3_{7\ (3,3,1)} = 8 + 3 \cdot 4 = 20$.

5 Metoda polinoamelor de tip Newton

În continuare vom dezvolta o metodă generală pentru calculul aranjamentelor generalizate (metoda polinoamelor de tip Newton [3], [4]).

Vom considera la început un caz particular, respectiv calculul numărului $A^3_{5\ (3,2)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui trei obiecte diferite în două căsuţe de capacităţi trei respectiv doi. La fiecare distribuire a obiectelor în căsuţe rămân două locuri necompletate. Să introducem o clasă de obiecte fictive, având două astfel de obiecte, astfel încât la fiecare distribuire a obiectelor, căsuţele să fie complet ocupate. Aceste obiecte fictive corespund "golurilor" sau "lipsurilor" din căsuţe la o distribuire a celor trei obiecte diferite. De asemenea, să presupunem la început că fiecare căsuţă poate primi cinci obiecte. Atunci, primul obiect se poate plasa în prima căsuţă sau în a doua căsuţă. Acestor posibilităţi de distribuire a primului obiect le putem ataşa polinomul simetric şi omogen de două nedeterminate: $P_1 = y_1 + y_2$

La fel, al doilea obiect se poate plasa în prima sau în a doua căsuţă. Scriem polinomul ataşat: $P_1 = y_1 + y_2$

Fiecărei distribuiri a primului obiect i se poate ataşa o distribuire a celui de-al doilea obiect, totalitatea distribuirilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$P_1^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$$

Al treilea obiect se poate de asemenea plasa în prima sau a doua căsuţă, polinomul ataşat fiind: $P_1 = y_1 + y_2$

Distribuirilor celor trei obiecte distincte le corespunde polinomul:

$$P_1^3 = y_1^3 + y_2^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2$$

Cele două obiecte identice ("golurile") se pot distribui ambele în prima căsuţă, ambele în a doua căsuţă sau una în prima şi cealaltă în a doua căsuţă. Polinomul ataşat va fi:

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2$$

Distribuirilor celor cinci obiecte le corespunde polinomul:

$$P_1^3 \cdot P_2 = y_1^5 + 4y_1^4 y_2 + 7y_1^3 y_2^2 + 7y_1^2 y_2^3 + 4y_1 y_2^4 + y_2^5$$

Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de nedeterminata respectivă. Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, prima căsuţă poate primi maximum trei obiecte iar a doua maximum două obiecte, deci distribuirile sunt de tipul $y_1^3\ y_2^2$. Deci, rezultă:

$$A_{5\ (3,2)}^{3} = 7.$$

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene de felul celor de mai sus prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţii de tip Newton, [1]). Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2$$

avem:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P = P_1^3 \cdot P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2)^5 + (y_1 + y_2)^3 \cdot \left(y_1^2 + y_2^2\right)\right]$$

Cu teorema multinomului [5] extragem coeficientului monomului $y_1^3 y_2^2$:

$$N = \frac{1}{2}\left[\frac{5!}{3!2!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{3!0!}\right] = 7$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci pentru calculul aranjamentelor generalizate:

$$A_{n\ (l_1, l_2, ..., l_m)}^{k}$$

se procedează astfel:

a)Se calculează polinomul:

$$P = P_1^k \cdot P_{n-k}$$

unde: $P_1 = x_1$ iar

$$P_{n-k} = P_{n-k}\left(x_1, x_2, ..., x_{n-k}\right)$$

este polinomul de tip Newton de grad $n - k$ în $n - k$ nedeterminate.

Deci,$P = P\left(x_1, x_2, ..., x_{n-k}\right)$ va avea gradul n şi $n - k$ nedeterminate $(n > k)$.

b)Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$

. . . .

$$x_{n-k} = y_1^{n-k} + y_2^{n-k} + ... + y_m^{n-k}$$

c)Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Primele patru polinoame de tip Newton sunt:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pòlya – de Bruijn [5] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

În cazul particular k = n se obţin permutările generalizate:

$$A_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)}n = P_{n\ (l_1,l_2,\ldots,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!\ldots l_m!}$$

6 Aplicaţii

Ca aplicaţii vom considera trei probleme.

a) Câte numere de patru cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3 dacă în fiecare astfel de număr cifra 1 se poate utiliza de cel mult 3 ori, cifra 2 de cel mult două ori şi cifra 3 de cel mult două ori?

b) Opt elevi urmează a fi cazaţi într-un cămin în trei camere având patru, trei şi respectiv trei paturi. În câte moduri se poate face distribuirea elevilor în camere?

c) Utilizând metoda polinoamelor de tip Newton, să se recalculeze $A_{7\ (3,3,1)}^3$.

Aplicând cele expuse mai sus, se obţin rezultatele:

a) $A_{7(3,2,2)}^4 = 62$

b) $A^{8}_{10\ (4,3,3)} = 2660$

c) $A^{3}_{7\ (3,3,1)} = 20$

Bibliografie

[1] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor*, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[2] V. M. Popa, *Unele generalizări în combinatorică*, Buletinul Ştiinţific al Institutului de Învăţământ Superior Sibiu, vol. III, Sibiu, 1980, pag. 33-39.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.

[5] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

Universitatea ,,Lucian Blaga Sibiu

Facultatea de Inginerie ,,Hermann Oberth

Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică

Str. Emil Cioran, nr. 4

Sibiu, România

E-mail address: *vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro*