Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 2 (2005), 69–70

Asupra unei inegalităţi

Vasilica Olaru

Abstract

In this paper we present a inequality which is a generalization of inequality presented by C. Mortici in [1].

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50.

1 Introducere

In [1] s-a propus următoarea problemă:

Fie a,b,c numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. *Demonstraţi că* $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestei inegalităţi.

2 Generalizarea la n numere

Propozitie 2.1 *Fie* $a_1, a_2, \cdots, a_n, n \geq 3$ *numere reale strict pozitive care verifică condiţia* $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq a_1\cdots a_n$, *atunci*
$\dfrac{a_1}{a_2\cdots a_n}+\dfrac{a_2}{a_1a_3\cdots a_n}+\dfrac{a_n}{a_1\cdots a_{n-1}} \geq \sqrt[n-1]{n}$

Demonstraţie. Condiţia $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq a_1\cdots a_n$ este echivalentă cu $\frac{1}{a_2\cdots a_n}+\cdots+\frac{1}{a_1\cdots a_{n-1}} \geq 1$

Notăm cu

$$x_i = \frac{1}{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n}, i=\overline{1,n}, \quad S=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Inegalitatea de demonstrat devine $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq \sqrt[n-1]{n} \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

Pentru a demonstra această inegalitate utilizăm inegalitatea lui Cauchy şi avem

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq \frac{S \sqrt[n-1]{S}}{n} \geq \frac{n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \sqrt[n-1]{n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}}{n} = \sqrt[n-1]{n} \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Propozitie 2.2 *Fie* $n \geq 3$ *si* $p \in [2, \frac{2n-1}{n-1}) \bigcap Q$*.Considerăm numerele reale strict pozitive care verifică condiţia* $x_1 + \cdots + x_n \geq 1$*. Atunci*

$$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p \geq \frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{n^{p-1}} \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_n}$$

Demonstratie. Din inegalitatea lui Cauchy-Hölder obţinem că

$$x_1^p + \cdots + x_n^p \geq \frac{S^p}{n^{p-1}} = \frac{S^{p-n+(n-1)(p-1)} S^{n-(p-1)(n-1)}}{n^{p-1}} \geq \frac{S^{p-1} \cdot S^{\frac{n-(p-1)(n-1)}{n-1}}}{n^{p-1}} \geq$$

$$\frac{n^{p-1}(x_1 \cdots x_n)^{\frac{p-1}{n}} \cdot n^{\frac{n-(p-1)(n-1)}{n-1}} (x_1 \cdots x_n)^{\frac{n-(n-1)(p-1)}{n(n-1)}}}{n^{p-1}} = \frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{n^{p-1}} \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_n}$$

References

[1] Lucian Dragomir, Adriana Dragomir, Ovidiu Badescu, Ion Damian Bîrchi *Exercitii si probleme de matematica pentru clasa a-IX-a(şi nu numai)* RMT, Editura Birchi 2004.

[2] G.M.Fihtenholt, *Curs de calcul diferential si integral*, Vol1, Editura tehnica Bucuresti,1963.

[3] M.Ganga, *Matematica, Manual pentru clasa a-IX-a Profil M1,M2* Editura Math Press 2003.

Liceul Gustav Gundisch,Cisnadie
Şcoala Generală Iacobeni,
Localitatea Iacobeni, Judeţul Sibiu,
E-mail: olarv2@yahoo.com