Educaţia Matematică Vol. 1, No. 2 (2005), 13–18

Locul geometriei analitice

Dan Brânzei

Abstract

In this paper will be presented some personal opinion regarding the position of analytic geometry in mathematical didactic in general and of geometry in special.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D70, 97C90, 97D20

Opiniile exprimate în acest articol par *minoritare*.

Dedicăm o primă secţiune geometriei analitice **în şcoală**.

Reluăm în acest scop eterna alternativă: predare *în spirală* sau *liniară*. Ne raliem ideii că predarea în spirală (numită uneori şi *ciclică* sau *concentrică*) are numeroase avantaje: asigură un plus de accesibilitate, este formativă, motivantă, flexibilă şi asigură fixări în trepte dar temeinice. Ramurile matematicii potrivite acestei strategii sunt algebra (algoritmi de calcul) şi geometria (sintetică). Aici se poate lărgi treptat clasa de numere sau obiecte matematice, respectiv evoluţia de la intuitiv la abstract. Ne vom referi la aceste două capitole cu notaţia **A**.

Nu prea se poate concepe predarea în spirală pentru domenii ce le notăm **B**: analiza matematică, algebra structurilor, geometria analitică. Acestea se bazează pe cunoştinţe dobândite la **A** şi nu prea rămâne timp pentru spirale succesive.

Aparent, se dă câştig de cauză predării liniare: trei discipline în **B** faţă de două în **A**. O analiză mai atentă ne arată însă că rostul prezenţei in şcoală a lui **B** nu este cel al unui studiu intrinsec ci acela de a realiza o sinteză a matematicii învăţate în şcoală. Gândind aşa, matematica se predă în şcoală în spirală: cunoştinţe de temelie se dobândesc spiralat în **A** şi sunt conexate, pe următoarele spire, în **B**.

Avem însă a aduce reproşuri tuturor celor din **B**: odată ajunse în şcoală, au uitat rostul lor şi fiecare vrea un studiu pentru sine. Trebuie oare algebra structurilor să marşeze spre a **A** module înainte de a aduce vorbă de relaţii de echivalenţă? Trebuie oare analiza să insiste asupra cazurilor patologice a funcţiilor neintegrabile sau integrabile dar neprimitivabile înainte de a se *coborî* să spună cum se separă rădăcinile ecuaţiilor algebrice şi cum se aproximează? Trebuie oare geometria analitică să dezvolte un breviar de formule cu tangente la conice înainte de esenţa metodei carteziene?

Asistăm, de o vreme, la o campanie de a duce fapte din **B** la clase mai mici. Nu spunem neapărat că acestea ar fi, una câte una inaccesibile, ci doar că sunt plantate pe un teren nepregătit. Nu e loc aici (şi poate că nu ne pricepem destul) să detaliem erori didactice în devansările din algebra structurilor şi analiză; ne vom restrânge spre geometria analitică.

Nu îndrăzneşte nimeni să nege virtuţile formative ale geometriei sintetice. Dar, dacă răsfoieşte cineva programe sau manuale, constată că este pe cale de dispariţie. Aşa cum, mai dinainte, a fost extirpată aritmetica se pregateşte şi exilarea geometriei (sintetice). Prea erau incomode prin cererea lor de a gândi mereu şi prin frecvenţa redusă a unor algoritmi memorabili mecanic.

Care a fost instrumentul principal de amputare a geometriei sintetice? Vectorii. Nu le negăm utilitatea, dar spunem că sunt aduşi în atenţia elevilor prea devreme. Ei reprezintă un al doilea limbaj de descriere a faptelor geometrice intuitive. El poate fi asimilat (formativ) abia când primul limbaj este însuşi suficient şi se vădeşte insuficient pentru adâncirea spre abstract.

Experienţe cu vectori (devreme) în şcoală s-au mai făcut: şi la noi prin anii 70 şi prin alte părţi. Noi ne deşteptasem; francezii nu prea ştiu cum ar putea scăpa de ei.

Se impune să vorbim despre interpretarea geometrică a numerelor complexe. Este faţa cea mai accesibilă a vectorilor (dimensiunea 2). Capitolul nu prea era accesibil la clasa a X-a. Dar era imperios necesar măcar pentru că aducea spre intuiţia elevilor studiul numerelor complexe. Acesta este indiscutabil necesar algebrei. Dar polinoamele au fost fugărite spre nicăieri şi se va vedea cum facem matematică fără ele.

Zicem că studiul (inclusiv geometric) al lui $\mathbb{C}$ este important şi că el trebuie să prefaţeze introducerea vectorilor. Este adevărat că se pot înhăma caii şi în urma căruţei dar ce om cu minte este dispus să experimenteze?

Solicit îngăduinţa şi pentru a discuta locul geometriei analitice şi **dincolo de şcoală**, făcând deci referiri şi la facultăţi de matematică.

Se afirmă frecvent că (*) "*principala virtute* a geometriei analitice este aceea de a asigura o metodă algoritmică de rezolvare a tuturor problemelor de geometrie". Avem *mai multe obiectii* faţă de asemenea formulări.

Geometria analitică este o *metodă*; ea oferă *linii de abordare* pentru majoritatea problemelor de geometrie, dar este discutabil că aceste linii *pot fi* convenabil *finalizate*. Investigând în clasa problemelor de geometrie ce le cunoaştem, apreciem la 25 % procentajul problemelor *soluţionabile* (în esenţa lor şi nu neapărat în detalii) *analitic*. Am adăuga că mai mult de jumătate dintre acestea câştigă în "viteză" şi "precizie" dacă în soluţie se apelează şi la considerente sintetice. Nu gândim fraza de mai sus ca un reproş, ci doar ca o nuanţare a unei formulări exagerat de abrupte. Ca metodă (sau ansamblu de metode) geometria analitică trebuie comparată cu *alte metode geometrice* şi o asemenea comparaţie este favorabilă geometriei analitice. (Metode ca "transformări geometrice", "relaţii metrice", "comparări de arii" dovedindu-şi eficienţa pe procentaje 1-2 %). Este corect să spunem că geometria analitică *transferă* o problemă de geometrie P într-o problemă de algebră P′. Apare aici *speranţa* că algebra oferă metode algoritmice de rezolvare a problemei P′, dar intră în discuţie *bogăţia de metode* şi *creativitatea* ce le posedă rezolvitorul în geometrie comparativ cu algebra.

În plan didactic este util să luăm în discuţie si *estetica* problemelor P si P′, presupunându-le rezolvabile, merită vorbit şi de estetica soluţiei. Apreciem că, relativ frecvent, probleme P frumoase se transferă (uneori cu opinteli) în probleme P′ urâte ce au parte de soluţii nerelevante. Această apreciere nu porneşte de la un plus personal de simpatie faţă de geometrie, ci de la faptul că se analizează aici trecerea de la P la P′. În replică, putem vorbi despre probleme de algebră Q ce se transferă prin mijloace ale geometriei analitice în probleme de geometrie Q′; aici, preponderent, Q va fi frumoasă, transferul discutabil, Q′ urâtă şi cu rezolvare nerelevantă.

Din partizanat faţă de o formulare (*) au fost selecţionate probleme P′ dintr-o clasa **C** de probleme algoritmizabile algebric (discuţia sistemelor liniare si reducerea formelor pătratice par a contura acceptabil clasa **C**). Se constituie apoi o clasă **A** de probleme P de geometrie, precizându-se modul lor de transfer t la probleme P′ ∈ **C** şi se acreditează ideea (**) că geometria analitică este (**A**, t) ! Apreciem că o astfel de idee (**) este justificată doar ca *pledoarie* (iniţială) pentru geometria analitică (nu se consideră nesportiv că într-o pledoarie să fie minuţios selectate argumentele "pro" şi ignorate sau minimalizate cele "contra"). Să admitem deci că formularea (*) este o virtute a geometriei analitice posibilitatea de transfer a unei clase largi de probleme de geometrie în probleme algoritmizabile algebric. Nu împărtăşim parerea că aceasta ar fi *principala* virtute!

Am aprecia prioritar geometria analitică, atât în plan ştiinţific, cât şi în plan didactic, pentru capacitatea ei de a *conexa* domenii matematice relativ disjuncte: geometria şi algebra (uneori şi analiza). Această conexare *poate fi* benefică şi pentru geometrie şi pentru algebră.

Dar acest *poate fi* nu prea îl credem realizabil dacă ne marginim la indicarea doar a unui mecanism *singular* de transfer t. Puşi în faţa unei probleme P nebanale şi decişi să o rezolvăm analitic, trebuie întâi să optăm pentru un *sistem de reperare* (euclidian sau afin sau chiar proiectiv, baricentric sau normal, punctual sau tangenţial). Apoi să alegem efectiv un asemenea reper (spre a simplifica transferul efectiv fară a diminua simetriile). Prima alegere reclamă şi *cunoaştere*, ambele înseamnă şi *creativitate* (atât în geometrie, cât şi în algebră). Alegerea efectivă a transferului necesită preestimarea dificultaţii calculelor şi *preestimarea* pare a fi mai importantă decât calculul efectiv.

Cu alte cuvinte, problema P impune gândirea transferului t într-o mulţime (cât mai amplă) T; problema P′ depinde de alegerea lui t în T atât ca rezolvabilitate cât şi ca estetică ! Rezolvarea problemei P′ poate *deveni relevantă* dacă este analizată dependenţa ei de alegerea lui t în T şi dacă etapele ei principale sunt ”întoarse prin t^{-1} în geometrie”.

Dorim să semnalăm *două dezavantaje didactice* ce ni se par majore ce derivă din adoptarea punctului de vedere (*).

Un dezavantaj constă in apariţia unui dispreţ faţă de ”demodata geometrie sintetică”. Geometria analitică, metodă a geometriei, nu îşi poate exercita rolul de a prezenta geometria (la un nivel de abstractizare şi unitate mai înalt) negând obiectul (=geometria) pe care îl studiază.

Un al doilea dezavantaj derivă din *supraestimarea laturii algoritmice*. Exagerând în scopul argumetării am spune că se transmite mesajul: ”învaţă cum să nu gândeşti, memora formule, aplică-le şi lasă calculele *să se ducă* unde vor ele”.

Gândim acum la elevii ce vor face o facultate la care învaţă şi matematica. (Chiar dacă procentajul lor este mai mic, sunt prea importanţi pentru a-i ignora). Pentru aceştia, geometria analitică este (sau trebuie să fie) *principala latură* între geometria din şcoală şi matematica din facultate. În facultăţi se cam trece direct la geometria analitică n-dimensională. Desigur, se câştigă astfel în generalizare şi în abstractizare. Noi ne întrebăm dacă asta este geometrie sau algebră liniară in formularea ce am prezentat-o drept cuplu (A, t) ? Nu avem nimc împotriva algebrei liniare dar ne întrebăm dacă titulatura este bună.

Când se exagerează în abstractizare şi generalitate, peste pregătirea intuitivă anterioară corespunzătoare, creşte riscul învăţării mecanice ce nu este *formativă* ci *deformantă*. Zăbava asupra cazului $n = 2$ începe să fie esenţială pentru că **aici** conicele au definiţii atât geometrice cât şi algebrice şi compararea lor este element esenţial al geometriei analitice. Tot $n = 2$ asigură şi "vizualizarea calculelor", deci sprijinul concret necesar în înţelegerea şi acceptarea unor idei generale.

Zicem că **fiecare învăţătură îşi are vârsta optimă**. Zicem că geometriei sintetice i se potriveşte *adolescenţa*. Spre sfârşit de facultate prezumţia adolescenţei devine aproape gratuită. A fost aici inserată nuanţarea dată de *aproape*, deoarece vizarea meseriei de profesor de matematiă facilitează disponibilităţi de apropiere *raţională* si *afectivă* de potenţialii elevi. Ideea de a reveni la geometrie sintetică prin metodele celei analitice ni se pare potrivită tinerilor ce aprofundează studii universitare de matematică.

Faculty of Mathematics
"Al. I. Cuza" University of Iaşi
Bd. Carol I, nr. 11,
700506 - Iaşi, Romania
E-mail: *dabran@uaic.ro*