Educaţia Matematică Vol. 1, No. 2 (2005), 39–48

Calculul limitelor unor şiruri de tip Euler asociate unui şir dat

D. M. Bătineţu-Giurgiu and Maria Bătineţu-Giurgiu

Abstract

In this paper we present the calculus of the limits of some Euler's sequences associated to a given sequence.

2000 Mathematical Subject Classification: 40A05

Considerăm un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale şi numărul $t \in \mathbb{R}_+$. Vom numi **şir de tip Euler asociat şirului** $(a_n)_{n\geq 1}$ **şi numărului** $t \in \mathbb{R}_+$, şirul $(\sigma_n)_{n\geq 1}$, de termen general:

$$\sigma_n = n^t \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Teorema 1. *Oricare ar fi numărul $t \in \mathbb{R}_+$ şi oricare ar fi şirul convergent $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, astfel încât, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, atunci şirul de tip*

Euler $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ *asociat şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi numărului* $t \in \mathbb{R}_+$*, este convergent şi avem:*

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} n^t \cdot \sum_{k=1}^{n} = \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} = \begin{cases} a \cdot ln\ 2, & t=0; \\ \frac{a}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Demonstraţia 1. (pentru $t \geq 0$**).** Este evident că $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$(3) \qquad |a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon, \forall\ n \geq n_\epsilon$$

Prin urmare,

$$-\epsilon < a_{n+k} - a < \epsilon, \forall\ n \geq n_\epsilon, \forall\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -\epsilon \cdot \frac{1}{(n+k)^{t+1}} < \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} -$$

$$-\frac{a}{(n+k)^{t+1}} < \epsilon \cdot \frac{1}{(n+k)^{t+1}}, \forall\ n \geq n_\epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\epsilon}{n^{t+1}} < -\frac{\epsilon}{(n+k)^{t+1}} < \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} -$$

$$-\frac{a}{(n+k)^{t+1}} < \epsilon \cdot \frac{1}{(n+k)^{t+1}} < \frac{\epsilon}{n^{t+1}},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare, avem realţiile:

$$-\frac{\epsilon}{n^{t+1}} < \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} - \frac{a}{(n+k)^{t+1}} < \frac{\epsilon}{n^{t+1}}, \forall n \geq n_\epsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Din relaţia precedentă, prin însumare după $k = \overline{1, n}$ deducem că:

$$-\epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{t+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} - a \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} < \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{t+1}}, \forall n \geq n_\epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\epsilon}{n^t} < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} - a \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} < \frac{\epsilon}{n^t}, \forall n \geq n_\epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < n^t \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} - a \cdot n^t \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon.$$

Ultimele inegalităţi ne arată că:

$$\lim_{n\to\infty} n^t \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} = a \lim_{n\to\infty} n^t \sum_{1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}}. \tag{4}$$

Să observăm că:

$$t = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = ln\ 2 \ \text{ şi că:} \tag{5}$$

$$t > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{n^t}} = \tag{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1+k)^{t+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{(n+1)^t} - \frac{1}{n^t}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} - \sum\limits_{k=2}^{n+2} \frac{1}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{n^t} - \frac{1}{(n+1)^t}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{(n+1)^{t+1}} - \frac{1}{(2n+1)^{t+1}} - \frac{1}{(2n+2)^{t+1}}}{(n+1)^t - n^t} \cdot n^{2t} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{t-1}}{(n+1)^t - n^t} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{(n+1)^{t+1}} - \frac{1}{(2n+1)^{t+1}} - \frac{1}{(2n+2)^{t+1}} \right) n^{t+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{t+1} - \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{t+1} - \left(\frac{n}{2n-2} \right)^{t+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{2^{t+1}} - \frac{1}{2^{t+1}}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{2^{t}}\right).$$

Conform cu (5) şi (6) relaţia (4) devine:

$$\lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} = a \lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} = \begin{cases} a \cdot ln\ 2, & \text{t=0;} \\ \frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Demonstraţia 2. (pentru $t > 0$). Este evident că:

$$\lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{n^t}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+1+k}}{(n+1+k)^{t+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{(n+1)^t} - \frac{1}{n^t}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}} - \sum_{k=2}^{n+2} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}}}{\frac{1}{n^t} - \frac{1}{(n+1)^t}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{t-1}}{(n+1)^t - n^t} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{t+1}} - \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)^{t+1}} - \frac{a_{2n+2}}{(2n+2)^{t+1}} \right) \cdot n^{t+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{t+1} - a_{2n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{t+1} - a_{2n+2} \left(\frac{n}{2n+2}\right)^{t+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(a \cdot -a \cdot \frac{1}{2^{t+1}} - a \cdot \frac{1}{2^{t+1}}\right) = \frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) = \frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right),$$

ceea ce era de demonstrat.

Propoziţia 1. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie cu proprietatea că există* $t \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{t+1}} = a \in \mathbb{R}$, *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \begin{cases} a \cdot ln\ 2, & t = 0; \\ \frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), & t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Demonstraţia. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{1}{n+k}\right)}{\frac{1}{(n+k)^{t+1}}} \cdot \frac{1}{(n+k)^{t+1}} = \tag{8}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n^t \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{(n+k)^{t+1}}$; unde $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) n^{t+1}$ şi unde conform enunţului

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{t+1}} = a.$$

Conform teoremei demonstrate din relaţia (8) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = a \cdot \lim_{n\to\infty} n^t \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^{t+1}} = \begin{cases} a \cdot\ ln\ 2, & t = 0; \\ \frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Propoziţia 1 este aceeaşi cu propoziţia 1 din lucrarea [2] dar cu o altă demonstraţie.

Propoziţia 2. *Fie* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă în vecinătatea originii, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right) - h(0)n\right) = h'(0) \cdot ln\ 2. \tag{9}$$

Demonstraţia. În propoziţia 1 considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)-g(0)$ care este derivabilă în vecinţatea originii şi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$. Deci, $a=g'(0)$ şi $t=1$. Rezulta atunci că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)=a\cdot ln\ 2\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right)-n\cdot g(0)\right)=$$

$$=g'(0)\cdot ln\ 2.$$

Propoziţia 3. *Dacă $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o fincţie de două ori derivabilă cu vecinătatea originii, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n+k}\right)-h(0)\cdot n-h'(0)\cdot ln\ 2\right)=\frac{1}{4}\left(h''(0)-h'(0)\right). \quad (10)$$

Demonstraţia. În Propoziţia 1 luăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=h(x)-h(0)-h'(0)\cdot x$$

şi atunci, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}\cdot f''(0)=\frac{1}{2}\cdot h''(0)$.

Deci, în Propoziţia 1 avem $a=\frac{1}{2}\cdot h''(0)$ şi $t=2$, de unde rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{4}\cdot h''(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n+k}\right)-h(0)\cdot n-h'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{4}\cdot h''(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n+k}\right)-n\cdot h(0)-h'(0)\cdot ln\ 2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}h''(0)+h'(0)\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-ln\ 2\right)=\frac{1}{4}\cdot h''(0)+$$

$$+h'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - ln\ 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \cdot h''(0) + h'(0) \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot h''(0) + h'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum\limits_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot h''(0) - h'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}{(n+1) - n} \cdot n(n+1) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot h''(0) - h'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \cdot n^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot h''(0) - h'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \cdot n^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot h''(0) - h'(0) \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{4} \cdot (h''(0) - h'(0)).$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Facem observaţia că dacă $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este o funcţie derivabilă de $m+1$, $m \in \mathbb{N}^*$ în vecinătatea originii iar

$$T_m(*) = h(0) + h'(0) \cdot + \frac{1}{2!} \cdot h''(0) \cdot x^2 + ... + \frac{1}{m!} \cdot h^{(m)}(0) \cdot x^m$$

este polinomul Taylor de gradul m asociat funcţiei h, atunci considerând în propoziţia 1, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = h(x) - T_m(x)$ avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{m+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - T_m(x)}{x^{m+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x) - T'_m(x)}{(m+1)x^m} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{h''(x) - T''_m}{m = cdot(m+1)\cdot x^{m-1}} = ... = \lim_{x\to 0} \frac{h^{(m)}(x) - T_m^{(m)}(x)}{(m+1)!x} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \cdot h^{(m+1)}(0).$$

Conform Propoziţiei 1 deducem că:

$$(11)\ \lim_{n\to\infty} n^m \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(h\left(\frac{1}{n+k}\right) - T_m\left(\frac{1}{n+k}\right)\right) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot h^{(m+1)}(0).$$

Aplicaţii

A.1.1. Dacă în Propoziţia 1 luăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, atunci $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Deci, $a = 1$ şi $t = 1$ de unde rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{n+k} = a \cdot ln\ 2 = ln\ 2.$$

A.3.1. Dacă în Propoziţia 3 luăm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin x$, atunci $h(0) = h''(0)$, $h'(0) = 1$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{n+k} - ln\ 2\right) = -\frac{1}{4}.$$

A. 1.2. Dacă în Propoziţia 1 luăm $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = tg\ x$, atunci $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, din $a = 1$ şi $t = 1$ de unde deducem că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} tg\frac{1}{n+k} = ln\ 2.$$

A.3.2. Dacă în Propoziţia 3 considerăm $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $h(x) = tg\ x$ atunci $h(0) = h''(0) = 0$, $h'(0) = 1$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} tg\frac{1}{n+k} - ln\ 2\right) = -\frac{1}{4}$$

A.1.3. Dacă în Propoziţia 1 considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = arctg\ x$, atunci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, deci $a = 1$, $t = 0$ şi atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} arctg \frac{1}{n+k} = ln\ 2.$$

A.3.3. În Propoziţia 3 luăm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = arctg\ x$, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $h''(0) = 0$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} arctg \frac{1}{n+k} - ln\ 2 \right) = -\frac{1}{4}.$$

A.1.4. Fie $b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ fixat şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b^x - 1$, atunci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = ln\ b$ şi deci $a = ln\ b$, $t = 0$ de unde obţinem că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b^{\frac{1}{n+k}} - n \right) = ln\ b \cdot ln\ 2.$$

A.3.4. Dacă în propoziţia 3 luăm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = b^x$, atunci $h(0) = 1$, $h'(0) = ln\ b$, $h''(0) = ln^2\ b$ şi deci:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} b^{\frac{1}{n+k}} - n - ln\ b \cdot ln\ 2 \right) = \frac{ln^2 b - ln\ b}{4}.$$

Cititorul poate găsi şi alte aplicaţii ale teoremei şi propoziţiilor demonstrate în această lucrare.

Bibliografie

[1] Bătineţu, M. D., *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

[2] Tetiva, M., *Asupra calculului unor limite*, Gen.. Mat., nr. 2,, 2000, 67 - 71.

Colegiul Naţional "Matei Basarab" - Bucureşti
Str. Matei Basarab, nr. 32, sector 3,
Bucureşti, România
E-mail: *cnmb@basarab.ro*

Academia Tehnică Militară - Bucureşti
Bd. George Coşbuc 81-83, sector 5
Bucureşti, România
E-mail: *atm@mta.ro*