Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 2 (2005), 59–68

Asupra unei metode pentru calculul unor integrale definite din functii trigonometrice

Ioana Aleman

Abstract

In this paper is presented one method of calculation for the trigonometrical integrals.

2000 Mathematical Subject Classification: 97D50

1

În calculul integralei

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, este utilă schimbarea de variabilă

$$a + b - x = t$$

deoarece prin ea se pastrează limitele de integrare, obţinând

$$I = \int_a^b f(a + b - t)dt$$

Această metodă se foloseşte deseori şi la integrale definite ce conţin funcţii trigonometrice. Mai întâi vom enunţa câteva propoziţii, după care cu ajutorul lor, prin particularizări ,vom calcula câteva integrale din funcţii trigonometrice.

Propoziţia 1. ([1], [2]) *Dacă* $a, b \in \mathbb{R}$ *,*$a < b, s = a + b$ *şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o functie integrabila pe* $[a, b]$*, atunci:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s-x)dx$$

Demonstraţie. Facem schimbarea de variabilă $t = \rho(x) = s - x$ cu

$$\rho'(x) = -1, \rho(a) = b, \rho(b) = a$$

şi atunci :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(s-x)(-1)dx = \int_a^b f(s-x)dx$$

Propoziţia 2. ([1], [2]) *Dacă* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b, s = a + b$ *şi funcţiile integrabile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *au proprietăţile:*

$$f(s-x) = f(x), g(x) + g(s-x) = c \in R, \forall x \in [a, b]$$

atunci:

$$2\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Demonstraţie. Comform propoziţiei 1, avem:

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(s-x)g(s-x)dx = \int_a^b f(x)g(s-x)dx$$

Prin urmare:

$$2I = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx + \int\limits_a^b f(x)g(s-x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)[g(x)+g(s-x)]dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

Propoziţia 3. *Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b, s = a + b$ iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sunt funcţii integrabile astfel încât:*

$$f(s-x) = f(x), g(x) + g(s-x) \in R_+^*, \forall x \in [a,b]$$

atunci:

$$2\int\limits_a^b \frac{f(x)g(x)}{g(x)+g(s-x)}dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei 1, avem:

$$I = \int\limits_a^b \frac{f(x)g(x)}{g(x)+g(s-x)}dx = \int\limits_a^b \frac{f(s-x)g(s-x)}{g(x)+g(s-x)}dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)g(s-x)}{g(x)+g(s-x)}dx$$

de unde obţinem că:

$$2I = \int\limits_a^b \frac{f(x)g(x)+f(x)g(s-x)}{g(x)+g(s-x)}dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

adică relaţia din enunţ.

1.1 Aplicaţii

1. Să se calculeze: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)dx$

Soluţie.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tg(\frac{\pi}{4}-x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{1+tg\frac{\pi}{4}}{1+tgx}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

de unde rezultă $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Generalizarea aplicaţiei 1 ar fi :

Să se calculeze: $\int_a^b \ln[1+tg(a+b)tgx]dx$ cu $0\leq a<b\leq\frac{\pi}{2}-a$

[Mihai Sandu G.M 9/2000]

Soluţie. Conform propoziţiei 1 avem :

$$I=\int_a^b\ln[1+tg(a+b)tgx]dx=\int_a^b\ln[1+tg(a+b)tg(a+b-x)dx=$$

$$=\int_a^b\ln[1+tg(a+b)\frac{tg(a+b)-tgx}{1+tg(a+b)tgx}]dx=$$

$$=\int_a^b\ln\frac{1+tg^2(a+b)}{1+tg(a+b)tgx}dx=\int_a^b\ln[1+tg^2(a+b)]-I$$

de unde $I=\frac{1}{2}(b-a)\ln[1+tg^2(a+b)]$

2. Să se calculeze:

$\mathrm{I}_1=\int_a^b\frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}}dx$

$I_2=\int_a^b\frac{(tgx)^{ctgx}}{(tgx)^{ctgx}+(ctgx)^{tgx}}dx$ dacă $a,b\in\mathbb{R}$, $0<b-a<2$ şi $a+b=\frac{\pi}{2}$.

Soluţie. Din propoziţia 1 rezultă că:

$$I_1 = \int_a^b \frac{[\sin(\frac{\pi}{2} - x)]^{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}}{[\sin(\frac{\pi}{2} - x)]^{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} + [\cos(\frac{\pi}{2} - x)]^{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}} dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = I_1'$$

dar $I_1 + I_1{}' = b - a$, de unde $I_1 = \frac{b-a}{2}$. Analog

$$I_2 = \int_a^b \frac{(ctgx)^{tgx}}{(ctgx)^{tgx} + (tgx)^{ctgx}} dx = I_2^1$$

dar $I_2 + I_2{}' = b - a$, deci $I_{2=}\frac{b-a}{2}$

O generalizare a acestei aplicaţii ar fi:

$\mathrm{I}_1 = \int_a^b \frac{(\sin^n x)^{\cos^n x}}{(\sin^n x)^{\cos^n x} + (\cos^n x)^{\sin^n n}} dx$

$I_2 = \int_a^b \frac{(tg^n x)^{ctg^n x}}{(tg^n x)^{ctg^n x} + (ctg^n x)^{tg^n x}} dx$

cu $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b - a < 2$ şi $a + b = \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}^*$

[D. M. Bătineţu Giurgiu, [3]]

Valoarea celor doua integrale este aceeaşi, adică $I_1 = I_2 = \frac{b-a}{2}$.

3. Să se calculeze :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 2x + \sin^4 2x) \ln(1 + tgx) dx$$

[D. Acu G.M 8 /1985]

Soluţie. $\mathrm{I}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos^4(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin^4(\frac{\pi}{2} - 2x)] \ln[1 + tg(\frac{\pi}{4} - x)] dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 2x + \sin^4 2x) \ln \frac{2}{1 + tgx} dx = = \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 2x + \sin^4 2x) dx - I$$

Prin urmare, $I = \frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^4 2x + \cos^4 2x)dx = \frac{3\pi}{32}\ln 2$

4. Dacă $a \in (0, \frac{\pi}{4}]$ şi $b \in \mathbb{R}$, să se calculeze

$$\int\limits_0^a (x^2 - ax + b)\ln(1 + tgatgx)dx$$

[V.Gorgota-GM 4/1998]

Soluţie. Fie $f(x) = x^2 - ax + b, g(x) = ln(1 + tgatgx)$

Este evident că:

f(a-x)=f(x) si g(a-x)=ln(1+tg^{2}a)-g(x), $\forall x \in [0, a]$ atunci conform proprietăţii 3

$$\int\limits_0^a f(x)g(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + tg^2 a)\int\limits_0^a f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1 + tg^2 a)\int\limits_0^a (x^2 - ax + b)dx = \frac{a}{2}\ln(1 + tg^2 a)(b - \frac{a^2}{2})$$

O generalizare a problemelor 4 şi 5 ar fi: dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$ cu $a < b \leq \frac{\pi}{2} - a$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă astfel încât $f(x) = f(a + b - x)$ $\forall\ x \in [a, b]$, atunci:

$$\int\limits_a^b f(x)\ln[1 + tg(a + b)tgx]dx = \frac{\ln[1 + tg^2(a + b)]}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$$

5. Să se calculeze

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x)\ln(1 + tg\frac{x}{2})dx$$

Soluţie.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^4(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4(\frac{\pi}{2} - x)] \ln[1 + tg(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})] =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x) \ln \frac{2}{1 + tg\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx - I$$

De unde

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \frac{3\pi \ln 2}{16}$$

Generalizare.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2n} x + \cos^{2n} x) \ln(1 + tg\frac{x}{2}) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

Dintr-un calcul analog se obţine:

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2n} x + \cos^{2n} x) dx$$

Dar folosind formulele de recurenţă pentru $I_n = \int \sin^n x dx$ şi $J_n = \int \cos^n x dx$, adică

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$J_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Obţinem: $\mathrm{I}_{2n} = J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$

Prin urmare:

$$I = \frac{\pi \ln 2}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

6. Să se calculeze:

$$I = \int_0^1 (2x^2 - 2x + 1)\ln(1 + tg\frac{\pi x}{4})dx$$

Soluţie. Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = 2x^2 - 2x + 1,\ g(x) = ln(1 + tg\frac{\pi x}{4})$

Deoarece $f(1-x) = f(x)$ şi $g(1-x) = ln(1 + tg^2\frac{\pi}{4}) - g(x)$ rezultă atunci că avem, conform propoziţiei 3:

$$I = \frac{1}{2}\ln(1 + tg^2\frac{\pi}{4})\int_0^1 (2x^2 - 2x + 1)dx = \frac{\ln 2}{3}$$

Generalizare. Dacă $a \in (0,1], b \in \mathbb{R}$ să se calculeze

$$I = \int_0^a (2x^2 - 2ax + b)\ln(1 + tg\frac{\pi a}{4}tg\frac{\pi x}{4})dx$$

[D.Batinetu OCTOGON.2/2000]

Soluţie. Fie $f, g : [0,a] \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = 2x^2 - 2ax + 1,$

$$g(x) = ln(1 + tg\frac{\pi x}{4}tg\frac{\pi a}{4})$$

Deoarece $f(a-x) = f(x)$ şi $g(a-x) = ln(1 + tg^2\frac{\pi a}{4}) - g(x)$ atunci :

$$I = \frac{1}{2}\ln(1 + tg^2\frac{\pi a}{4})\int_0^a f(x)dx$$

7. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1)\ln(1 + tg\frac{\pi x}{4})dx$$

[D.Acu–G.M.7/1982]

Soluţie. Procedând analog ca mai sus obţinem: $I = \frac{13\ln 2}{30}$

Generalizare. Dacă $a \in (0,1], b \in \mathbb{R}$ şi $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ cu

$$f(x) = x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x + b$$

Atunci

$$\int_0^a f(x)\ln(1 + tg\frac{\pi a}{4}tg\frac{\pi x}{4})dx = \frac{1}{2}\ln(1 + tg^2\frac{\pi a}{4})\int_0^a f(x)dx$$

8. Să se calculeze:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + e^x}dx$$

[L.Niculescu G.M.2/1998]

Soluţie. Punem $u(x) = \frac{\cos^3 x}{1+e^x}$ şi notăm

$$t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x$$

Atunci $u(-t) = \frac{e^t \cos^3 t}{1+e^t}$, de unde $u(x) + u(-x) = cos^3 x$.

Se obţine:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^3 x - u(x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - I$$

de unde $I = \frac{2}{3}$.

Generalizare

Să se calculeze:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+1} x}{1+e^x} dx, n \in N^*$$

Se obţine:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^{2n+1} x - u(x)]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} xdx - I$$

De unde

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} xdx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Bibliografie

[1] D.M.Batineţu-Giurgiu, *Analiză matematică – probleme pentru clasa a XII-a*, MATRIXROM Bucureşti

[2] Colectia *Gazeta matematica*

[3] Colectia *Revista Octogon*

Grupul Şcolar Energetic Sibiu

E-mail: *mi_al_co@yahoo.com*