Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 113–117

O problemă de convergenţă a unui şir de funcţii

Didina-Maria Secelean, Nicolae-Adrian Secelean

Abstract

In this paper we will present an interesting situation when a property holds in the finite case but is not valid in the infinite case. In fact, that is an example in which the pointwise convergence of a sequence of continuous functions is not sufficient for the continuity of the limit.

2000 Mathematical Subject Classification: 40A05, 40A30

Dacă se consideră numerele $r_1, r_2, \dots, r_N \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}^*$, atunci funcţia $\gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^t$$

are proprietăţile: $\gamma(0) = N$ şi $\gamma(t) \searrow 0$ când $t \to \infty$.

Aşadar, funcţia fiind, evident, continuă, există un unic număr pozitiv $s > 0$ astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{N} r_n^s = 1$.

Se pune problema, în cele ce urmează, dacă această proprietate rămâne valabilă în cazul numărabil. Cu alte cuvinte, dacă se dă un şir de numere reale $(r_n)_{n\geq 1} \subset (0,1)$, există un număr real $s > 0$ aşa încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^s$ să fie convergentă cu suma 1 ?

Răspunsul este, după cum vom ilustra printr-un contraexemplu, negativ.

Avem nevoie, mai întâi, de:

Lema 1. *Fie $(r_n)_{n\geq 1} \subset (0,1)$ şi, pentru orice $k \geq 1$, $s_k \geq 0$, astfel ca $\sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} = 1$. Presupunem că există $s > 0$ astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^s = 1$.*

Atunci $s_k \nearrow s$.

Demonstraţie. Deoarece $r_n \in (0,1)$, avem, pentru orice $k \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} = 1 = \sum_{n=1}^{k+1} r_n^{s_{k+1}}$$

şi deci

$$\sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} > \sum_{n=1}^{k} r_n^{s_{k+1}}$$

ceea ce este echivalent cu $s_k < s_{k+1}$.

Aşadar şirul $(s_k)_k$ este strict crescător.

Apoi, deoarece

$$\sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} = 1 > \sum_{n=1}^{k} r_n^{s},$$

deducem $s_k < s$, $\forall\, k \geq 1$.

Şirul $(s_k)_k$ este mărginit, deci convergent, iar $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = t \leq s$.

Presupunem că, prin absurd, $t < s$. Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{t} > \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{s} = 1$$

deci

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} r_n^t > 1.$$

De aici rezultă că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_{n=1}^{N} r_n^t > 1,$$

prin urmare

$$1 = \sum_{n=1}^{N} r_n^{s_N} > \sum_{n=1}^{N} r_n^t > 1,$$

ceea ce este absurd.

Aşadar, $s_k \nearrow s$. $\square$

Să considerăm, acum, pentru orice $n \geq 2$, $r_{n-1} = \dfrac{1}{1+q}\cdot\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, unde $q = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$, seria fiind convergentă (utilizând criteriul de condensare sau cel integral).

Teorema 1. *Nu există* $s > 0$ *astfel ca*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^s = 1.$$

Demonstraţie. Se observă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, seria

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\varepsilon}(\ln n)^{2(1-\varepsilon)}} \tag{1}$$

diverge.

Într-adevăr, utilizând criteriul condensării,

$$\frac{2^n}{2^{(1-\varepsilon)n}\cdot n^{2(1-\varepsilon)}} = \frac{(2^\varepsilon)^n}{n^{2(1-\varepsilon)}} \xrightarrow{n} \infty.$$

Este evident, din definiţie, că

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < 1. \tag{2}$$

Fie, pentru $k \geq 2$, $s_k > 0$ astfel încât $\sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} = 1$. Atunci $s_k < 1$, $\forall\, k$.

Să arătăm că $\sup_k s_k = 1$.

Astfel, dacă $\sup_k s_k = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, atunci

$$\sum_{n=1}^{k} r_n^{1-\varepsilon} \leq \sum_{n=1}^{k} r_n^{s_k} = 1,\ \forall\, k \geq 2,$$

deci seria $\sum_{n=1}^{k} r_n^{1-\varepsilon}$ converge şi se contrazice, astfel, (1). Aşadar $\sup_k s_k = 1$.

Dacă, prin absurd, există $s > 0$ astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{s} = 1$, atunci, din lema 1 şi cele de mai sus, $s = 1$.

Dar, din (2), $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < 1$.

$\square$

Observaţie. *Dacă notăm, pentru $k \geq 1$,*

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{k} r_n^t \ \text{ şi } \ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^t$$

(f fiind considerată cu valori în $\bar{\mathbb{R}}_+$), atunci şirul $(f_k)_k$ converge la f punctual. Convergenţa nu este, însă, uniformă deoarece, în timp ce funcţiile f_k sunt, evident, continue, f nu este continuă.

Demonstraţie. Într-adevăr, din (2), $f(1) < 1$. Apoi, cu notaţiile din teorema precedentă, pentru un $k \geq 1$ oarecare, avem $f(s_k) > 1$ dar, din teorema 1, nu există $s > 0$ astfel ca $f(s) = 1$ şi deci f nu are proprietatea valorilor intermediare. Ca urmare f nu este continuă.

$\square$

Bibliografie

[1] N. Boboc, *Analiză Matematică* (**I**), Ed. Univ. Bucureşti, 1988;

[2] I. Colojoară, *Analiză Matematică*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1983;

[3] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză Matematică* (**I, II**) , Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1971.

D.M. Secelean
Elementary School Cristian, Sibiu
Romania
E-mail address: dsecelean@yahoo.com

N. A. Secelean
Department of Mathematics
University "Lucian Blaga" of Sibiu,
Str. Dr. I. Ratiu, Nr. 5–7,
550012 Sibiu, Romania
E-mail address: secelean@arhimede.ulbsibiu.ro