

Matematica și Bazele electrotehnicii

Vasile Mircea Popa

Abstract

This paper presents the connection between mathematics and bases of electrotechnics. The field theory and circuit theory is based on the concept of mathematical modeling. To analyze any complex physical system, we must be able to describe the system in terms of an idealized model, that is an interconnection of idealized elements. Although physical elements and physical phenomena may be described only approximately, idealized elements are by definition precisely characterized. At the end of the paper are presented the conclusions.

2000 Mathematical Subject Classification: 97U99

1 Introducere

Disciplina Bazele electrotehnicii studiază fenomenele electrice și magnetice din punctul de vedere al aplicației tehnice [4]. Ea constituie pregătirea teoretică de bază a inginerilor de la toate specializările de profil electric. Teoria

utilizată este, în special, teoria macroscopică a electricității și magnetismului, numită și teoria lui Maxwell. Aceasta este teoria fenomenologică, dezvoltată fără studierea în detaliu la scară atomică a fenomenelor electromagnetice. Teoria macroscopică a lui Maxwell este în general suficientă pentru aplicațiile tehnice curente. Pentru aplicații tehnice speciale, se utilizează și teorii mai profunde aparținând fizicii moderne (teoria relativității, teoria cuantică a fenomenelor electromagnetice, fizica corpului solid).

Este deci evident că disciplina Bazele electrotehnicii utilizează cunoștințe de fizică clasică și modernă care se dobândesc în cursul primului an de facultate [3].

Astfel, pentru cursul de Bazele electrotehnicii, sunt utilizate unele capitole de matematică, pe care le enumerăm, în continuare.

a) **Analiza matematică** (integrale duble și triple, integrale curbilinii de spețele I și a II-a, integrale de suprafață de spețele I și a II-a, formula lui Stokes, formula Gauss-Ostrogradski, ecuații diferențiale, sisteme de ecuații diferențiale, ecuații cu derivate parțiale.)

b) **Teoria câmpurilor** (câmp scalar, câmp vectorial, operatorii gradient, rotor, divergență, derivata substanțială a unei funcții definite printr-o integrală de suprafață de speța a II-a).

c) **Ecuațiile fizice matematice** (ecuația lui Laplace, ecuația lui Poisson, ecuația undelor, ecuația lui Helmholtz, problema lui Dirichlet, problema lui Neumann).

d) **Analiza complexă** (reprezentarea unei funcții sinusoidale printr-un număr complex, proprietăți).

e) **Serii Fourier** (seria Fourier, integrala Fourier, transformata Fourier).

f) **Calcul operațional** (transformata Laplace: definiție, exemple, pro-

prietăți, aplicații).

g) **Funcții speciale** (funcțiile lui Bessel: definiție, proprietăți).

După cum se vede din lista anterioară, este vorba de cunoștințe serioase de matematici superioare predate studenților în anul I de facultate. Este foarte important ca în momentul utilizării noțiunilor de mai sus la Bazele electrotehnicii, ele să fi fost deja studiate de studenți la cursurile de matematică. Din acest motiv, este necesar ca ele să fie predate la Matematică anterior utilizării la Bazele electrotehnicii (sau în cel mai rău caz, aproximativ în paralel).

În viziunea actuală, Bazele electrotehnicii sunt formate din două părți mari:

- **Teoria câmpului electromagnetic**
- **Teoria circuitelor electrice.**

Vom arăta în continuare în ce măsură Matematica intervine în cele două părți mari ale Bazelor electrotehnicii. Pentru partea de Teoria circuitelor electrice, vom prezenta un frumos exemplu de utilizare a instrumentului matematic pentru studierea regimului tranzitoriu al unui circuit electric.

2 Teoria câmpului electromagnetic

În teoria fenomenologică, microscopică, a electromagnetismului, conceptul de câmp electromagnetic este esențial. El definește o formă fizică de existență a materiei, relativ distinctă de forma de substanță. Câmpul electromagnetic există atât în interiorul corpurilor, cât și în vid. El este constituit din două componente relative și interdependente: câmpul electric și câmpul magnetic.

În teoria câmpului electromagnetic, ca parte a Bazelor electrotehnicii, se pune problema studierii acestui câmp, atât sub aspectul proprietăților fizice generale, cât și (mai ales) al calculului precis al parametrilor lui, legat de diverse dispozitive tehnice, în vederea proiectării optimale a acelor dispozitive. Pentru calculul câmpului electromagnetic se pornește de la ecuațiile lui fundamentale, urmărindu-se obținerea unor metode de calcul care să conducă în final la rezultate numerice cu precizia necesară [1].

Asupra câmpului electromagnetic se pot formula două categorii de probleme:

a) **probleme de analiză** (calcul sau determinare) a câmpului electromagnetic, la care, fiind date domeniul de existență a câmpului, distribuția spațio-temporală a surselor câmpului și celelalte condiții de unicitate asociate, se cere determinarea perechilor de specii de mărimi de stare macroscopică a câmpului electromagnetic: (E,D) și (H,D) .

b) **probleme de sinteză** a câmpului electromagnetic, la care se presupune cunoscută repartiția spațială și evoluția în timp a câmpului electromagnetic în domeniul său de definiție și se cere determinarea corespunzătoare a surselor câmpului.

Formularea corectă a unei probleme de analiză a câmpului electromagnetic macroscopic presupune, în primul rând, definirea fenomenologiei de bază a problemei, stabilirea modelului ei fenomenologic. Urmează apoi obținerea unui model matematic de câmp electromagnetic. Acesta poate fi în principiu, de tip diferențial, variațional sau integral. Rezolvarea sa, în vedere obținerii soluției problemei, se poate efectua pe cale analitică sau numerică.

Metodele analitice sunt cele mai riguroase, în domeniile lor de aplica-

bilitate, dar devin rapid inutilizabile la creșterea complexității problemelor.

Metode numerice s-au impus recent, datorită dezvoltării impetuoase a tehnicii de calcul. Comparativ cu metodele analitice, cele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mult mai mare. Ele permit obținerea unor rezultate cu precizia dorită, pentru problema de câmp abordată.

Reuniunea dintre un model matematic de câmp electromagnetic și o metodă numerică de rezolvare a acestuia conform unui algoritm programabil definește un model numeric de câmp electromagnetic. Se ajunge astfel la o disciplină de graniță matematico-inginerească, numită **analiza numerică a câmpului electromagnetic**.

Aceasta ar fi, foarte pe scurt, problematica de bază a Teoriei câmpului electromagnetic. Se observă strânsa legătură dintre Matematică și această parte a Bazelor electrotehnicii, de foarte mare importanță în tehnica modernă, având în vedere proiectarea produselor electronice și a sistemelor de telecomunicații.

3 Teoria circuitelor electrice

Această a doua parte din Bazele electrotehnicii folosește și ea din plin metodele matematice pentru soluționarea problemelor legate de circuitele electrice. Circuitele electrice pot funcționa în diverse regimuri: de curent continuu, de curent alternativ sinusoidal, în regim nesinusoidal, în regim tranzitoriu. Și în cadrul Teoriei circuitelor electrice există două categorii de probleme: de analiza circuitelor electrice și de sinteza circuitelor electrice [2].

Importanța Teoriei circuitelor electrice este evidentă, având în vedere

producerea, transportul și utilizarea energiei electrice, în toate aspectele ei. Din acest motiv, la predarea cursului de Bazele electrotehnicii se insistă pe acest capitol, atât pe teorie, cât și pe aplicații.

Pentru a exemplifica, după considerațiile mai generale anterioare, modul în care Matematica este utilizată în Bazele electrotehnicii, vom prezenta în cele ce urmează o problemă de regim tranzitoriu.

Pentru rezolvarea ei, vom utiliza două metode:

- metoda rezolvării ecuației diferențiale
- metoda operațională.

Problema este următoarea: la momentul $t=0$ se aplică o tensiune continuă (E) pe un rezistor legat în serie cu un condensator. Se cere variația curentului în circuit. Presupunem că inițial condensatorul este descărcat (vezi fig. 1).

Fig.1

a) Metoda rezolvării ecuației diferențiale

În această metodă se obține ecuația diferențială a circuitului (funcția necunoscută fiind curentul), care se rezolvă.

După închiderea întrerupătorului, la momentul $t = 0$, în circuit apare curentul i care produce pe cele două elemente căderile de tensiune u_R și u_C . Se poate scrie:

$$(1) \quad u_R + u_C = E$$

unde:

$$(2) \quad u_R = Ri$$

$$(3) \quad u_C = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt$$

$$\text{Deci: } Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E$$

$$\text{Prin derivare obținem: } R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \text{ sau } \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

Notăm $RC = T$ (constanta de timp a circuitului) și ecuația devine:

$$(4) \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{T} i = 0$$

Soluția generală a ecuației este:

$$(5) \quad i = Ke^{-\frac{t}{T}},$$

unde K este constanta de integrare.

Pentru determinarea acestei constante folosim condiția inițială:

$$i(0) = \frac{E}{R}$$

deoarece curentul este limitat inițial numai de rezistența în circuit, condensatorul comportându-se ca un scurtcircuit.

Rezultă:

$$(6) \quad K = \frac{E}{R}$$

Obținem expresia curentului în circuit:

$$(7) \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}$$

Curentul scade exponențial și tinde spre 0 după un timp lung, ceea ce din punct de vedere fizic este evident.

b) Metoda operațională

Această metodă se bazează pe transformata Laplace, deci pe calcul operațional, dar nu în sensul că se rezolvă diferențială a circuitului prin această metodă. Întrepătrunderea cu transformata Laplace este chiar mai profundă, folosindu-se așa numita "schemă operațională" a circuitului.

Corespunzător circuitului din figura 1, se desenează schema operațională în care apar impedanțele operaționale ale celor două elemente, precum și imaginile în operațional ale tensiunii aplicate și ale curentului (vezi fig.2).

Fig. 2

Curentul din schema operațională rezultă cu legea lui Ohm:

$$(8) \quad I(s) = \frac{\frac{S}{s}}{R + \frac{1}{sC}}$$

Se poate scrie:

$$(9) \quad I(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Utilizând transformata Laplace inversă obținem imediat curentul ca funcție de timp:

$$(10) \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}$$

unde T este constanta de timp a circuitului.

Am obținut același rezultat printr-o metodă mai expeditivă și mai intuitivă.

Exemplul anterior este foarte simplu dar ilustrează modul în care Matematica este utilizată în Teoria circuitelor electrice. Evident, problemele sunt extrem de variate și de complexe, pentru rezolvarea lor utilizându-se metode matematice dintre cele mai sofisticate.

4 Concluzii

Matematica intervine decisiv în Bazele electrotehnicii, disciplină tehnică fundamentală pentru specializările ingineresti de profil electric. Disciplina Bazele electrotehnicii utilizează cunoștințe de Matematică și de Fizică pe care le dezvoltă într-un mod specific, în scopul realizării unui fundament pentru disciplinele electrotehnice de specialitate. Conexiunea este inversă, în sensul că multe dintre problemele ridicate de electrotehnică (și de tehnică, în general) au servit ca punct de plecare pentru dezvoltarea unor teorii matematice moderne.

Bibliografie

- [1] G. Mîndru, ș.a, *Modelarea numerică a câmpului electromagnetic*, vol. 1, 2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1995.
- [2] E. Simion, ș.a, *Teoria circuitelor electrice*, vol. 1, 2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1996.
- [3] O. Stănășilă, *Matematici speciale*, Editura All, București, 2001.

- [4] V.M. Popa, *Bazele electrotehnicii*, Editura Alma Mater, Sibiu, 2002.

Universitatea "Lucian Blaga" Sibiu,
Facultatea de Inginerie "Hermann Oberth",
Catedra de Inginerie Electrică și Electronică,
str. Emil Cioran, nr. 4,
2400 Sibiu, România
E-mail: *popavm@vectra.ulbsibiu.ro*