Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 131–136

Descompunerea pătratului unui număr natural în suma de trei pătrate de numere prime

Doriana Dorca

Abstract

In this paper we propose to study the representation of a natural number′s square as sum of three prime natural number′s squares or of two prime numbers and another one not necessarily prime.

2000 Mathematical Subject Classification: 11P32

Problema reprezentării numerelor naturale ca sume de pătrate a preocupat matematicienii din cele mai vechi timpuri. De exemplu, P. Fermat a arătat că numerele prime de forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ se pot reprezenta ca sumă de două pătrate perfecte ([2]). Literatura matematică actuală conţine multe rezultate privind reprezentarea numerelor naturale.

În [3], problema 9, capitolul 1, autorii propun următoarea problemă de reprezentare: *Dacă p şi q sunt numere prime şi a este natural, $a^2 = p^2 + q^2 + 1$, atunci a este prim.*

În această lucrare ne propunem să generalizăm această problemă, studiind reprezentarea pătratului unui număr natural ca sumă de pătrate a trei numere naturale prime sau alte două numere prime şi unul nu neapărat prim.

1. Să ne ocupăm mai întâi de reprezentarea pătratului unui număr natural ca sumă de trei pătrate de numere prime p, q, r. Prin urmare, trebuie să cercetăm existenţa relaţiei $a^2 = p^2 + q^2 + r^2$, cu $a \in \mathbb{N}$ şi p, q, r numere prime.

Vom considera două cazuri, după cum a este impar sau a este par.

1.1. Dacă **a este impar**, $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, rezultă că

$$a^2 = M_8 + 1. \tag{1}$$

Considerăm mai multe subcazuri:

1.1.1. p, q, r - impare. Avem în acest subcaz,

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = M_8 + 1 + M_8 + 1 + M_8 + 1 = M_8 + 3,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

1.1.2. $p = 2, q$ **şi** r **impare.** Avem

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 4 + +M_8 + 1 + M_8 + 1 = M_8 + 6$$

şi avem din nou contradicţie.

1.1.3. $p = q = 2$**,** r **impar.** Atunci $a^2 = 8 + r^2$ sau $(a - r)(a + r) = 8$, de unde

$$\begin{cases} a - r = 1 \\ a + r = 8 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a - r = 2 \\ a + r = 4 \end{cases}$$

Primul sistem nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale, iar cel de al doilea conduce la $a = 3$, $r = 1$, care constituie soluţia problemei amintite mai sus.

1.1.4. $p = q = r = 2$**.** Avem $a^2 = 12$, care nu este posibilă în numerele naturale.

1.2. a par. În acest caz avem $a^2 = 4k^2, a^2 = M_4$. Considerăm din nou mai multe subcazuri:

1.2.1. p, q, r **impare.** Atunci suma $p^2 + q^2 + r^2$ este un număr impar, contradicţie cu a^2 par.

1.2.2. $p = 2, q, r$ **impare.** Avem

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 4 + M_4 + 1 + M_4 + 1 = M_4 + 2,$$

contradicţie cu $a^2 = M_4$.

1.2.3. $p = q = 2$ **şi** r **impar.** Rezultă

$$p^2 + q^2 + r^2 = 8 + M_8 + 1 = M_8 + 1 = M_4 + 1,$$

contradicţie.

1.2.4. $p = q = r = 2$. Avem $a^2 = 4 + 4 + 4 = 12$, ceea ce nu este posibil în numere naturale.

Aşadar, nu există descompuneri ale pătratului unui număr natural în sumă de trei pătrate de numere prime.

2. Să cercetăm acum descompunerea pătratului unui număr natural în sumă de trei pătrate de numere naturale, dintre care două să fie numere prime şi unul număr natural, adică $a^2 = p^2 + q^2 + r^2$, cu p, q prime şi $r \in \mathbb{N}$. Avem din nou cazurile:

2.1 a - număr par. Avem $a^2 = M_4$.

Vom considera mai multe subcazuri:

2.1.1. p, q, r **impare.** Rezultă că:

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = M_4 + 1 + M_4 + 1 + M_4 + 1 = M_4 + 3,$$

ceea ce constituie o contradicţie cu a par.

2.1.2. $p = 2, q, r$ **impare.** Avem

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 4 + M_4 + 1 + M_4 + 1 = M_4 + 2,$$

contradicţie cu $a^2 = M_4$.

2.1.3. $p = q = 2, r$ **impar.** Deoarece $p^2+q^2+r^2 = 4+4+M_4+1 = M_4+1$, am obţinut o contradicţie cu $a^2 = M_4$.

2.1.4. p, q **impare,** r **par.** Avem

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 = M_4 + 1 + M_4 + 1 + M_4 = M_4 + 2$$

contradicţie cu $a^2 = M_4$.

2.1.5. $p = 2$**,** q **impar,** r **par.** Obţinem:

$$a^2 = P^2 + q^2 + r^2 = 4 + M_4 + 1 + M_4 = M_4 + 1,$$

contradicţie cu $a^2 = M_4$.

2.1.6. $p = q = 2, r$ **par.** Avem $a^2 = 8 + r^2$, relaţie echivalentă cu $(a-r)(a+r) = 8$, care conduce la $a = 3, r = 1$, contradicţie cu r şi a pare.

2.2. a impar. Avem $a^2 = M_4 + 1$. Iarăşi vom considera mai multe subcazuri.

2.2.1. p, q, r **impare.** Cum $p^2+q^2+r^2 = M_4+1+M_4+1+M_4+1 = M_4+3$, rezultă că avem o contradicţie cu $a^2 = M_4 + 1$.

2.2.2. $p = 2, q, r$ **impare.** Avem $p^2 + q^2 + r^2 = M_4 + 2$, contradicţie cu $a^2 = M_4 + 1$.

2.2.3. p, q **impare,** r **par.** Deoarece

$$p^2 + q^2 + r^2 = M_4 + 1 + M_4 + 1 + M_4 = M_4 + 2,$$

avem din nou o contradicţie cu $a^2 = M_4 + 1$.

2.2.4. $p = 2, q$ **impar,** r **par.** Fie $q = 2x + 1$, cu $x \in \mathbb{N}$. Atunci din $a^2 = 4+q^2+r^2$, obţinem $a^2-r^2 = 4+(2x+1)^2$ sau $(a-r)(a+r) = 4+(2x+1)^2$. O soluţie posibilă se obţine dacă luăm:

$$\begin{cases} a - r = 1 \\ a + r = 4 + (2x + 1)^2 \end{cases} \quad \text{de unde obţinem:}$$

$$\begin{cases} r = 2x^2 + 2x + 2 \\ a = 2x^2 + 2x + 3 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} a = 2x(x+1) + 3 \\ r = 2[x(x+1)+1] \end{cases}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Deci, există numere naturale impare ale căror pătrate se descompun în sumă de trei pătrate de numere naturale p, q şi r care îndeplinesc condiţiile: $p = 2$, $q = 2x + 1$ - impar, $r = [x(x+1)+1]$ - par, şi $a = 2x(x+1) + 3$ - impar.

Exemple:

1. Pentru $x = 1$, obţinem: $a = 7$, $p = 2$, $q = 3$, $r = 6$ cu $7^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$.

2. Pentru $x = 2$, avem $a = 15$, $p = 2$, $q = 5$, $r = 14$ cu $15^2 = 2^2 + 5^2 + 14^2$.

3. Pentru $x = 3$, obţinem: $a = 27$, $p = 2$, $q = 7$, $r = 26$ cu $27^2 = 2^2 + 7^2 + 26^2$.

4. Pentru $x = 4$, găsim: $a = 43$, $p = 2$, $q = 9$, $r = 42$ cu $43^2 = 2^2 + 9^2 + 42^2$. Se observă că q nu mai este prim.

2.2.5. $p = q = 2$**, r - impar.** Cum $p^2 + q^2 + r^2 = M_4$ şi $a^2 = M_4 + 1$, avem o contradicţie.

2.2.6. $p = q = 2$; **r - impar.** Acest caz a fost studiat la 1.1.3. şi admite soluţia $a = 3$, $p = q = 2$ şi $r = 1$.

Observaţie. Ar fi interesantă o soluţie a problemelor din această notă, pornind de la ecuaţia pitagorică $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Se cunoaşte (v. [1]) că toate soluţiile în numere naturale ale acestei ecuaţii date de x, y, z, t, cu y, z numere pare, şi

$$x = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{n}, y = 2l, z = 2m, t = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{n},$$

unde l, m sunt numere naturale arbitrare iar n este un divizor al lui $l^2 + m^2$ mai mic decât $\sqrt{l^2 + m^2}$. Orice soluţie se obţine o singură dată în acest fel.

Bibliografie

[1] Andreescu, T., Andrica, D., *O introducere în studiul ecuaţilor diofantiene*, Editura GIL, zalău, 2002.

[2] Buşneag, D., Boboc, Fl., Piciu, D., *Aritmetica şi teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova, 1999.

[3] Panaitopol, L., Şerbănescu, D., *Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori*, Editura GIL, Zalău, 2003.

[4] Sierpinski, W., *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

Liceul de Artă
Str. Alexandru Odobescu, nr. 2, Sibiu
E-mail: *doriana_dorca@yahoo.com*