Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 77–88

Şiruri din clasa de adiacenţă $\ln 2$

Maria Bătineţu - Giurgiu, D.M. Bătineţu - Giurgiu

Abstract

In this paper we study a class of sequences which converge to $ln\,2$.

2000 Mathematical Subject Classification: 40A05

Iniţial am intitulat acest articol "*Asupra unui şir din manuale*". Am fost tentaţi să dăm acest titlu din dorinţa de a evidenţia faptul că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \tag{1}$$

apare în mai multe manuale şcolare cu diferite cerinţe după cum urmează:

i) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14},\ \forall n \geq 2 \text{ (a se vedea [6], pag. 48).} \tag{2}$$

ii) Ce se poate spune despre (enunţ adaptat):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) \text{ (a se vedea [5], pag. 48).} \tag{3}$$

iii) Să se arate că:

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$ (a se vedea [3], pag. 80).

În [5] nu se dă răspuns la întrebarea ii), de aceea arătăm că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, mărgint superior şi deci convergent, adică există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

Întradevăr,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0,\ \forall n\geq 1,$$

ceea ce arată că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

De asemenea avem:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

ceea ce arată mărginirea superioară a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit superior, rezultă că el este convergent, adică există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

În [3] cu ajutorul integralei definite (al sumelor Riemann) se arată că

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

De asemenea în [2] şi [4] se arată că şirul $(\mu_n)_{n\geq 1}$, $\mu_n=-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (şirul constantei lui Euler) este convergent către celebra constantă a lui Euler, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu=0,577215664901532...$.

Să observăm că:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\mu_{2n}-\mu_n+\ln 2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

de unde deducem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \ln 2$.

Fie $\delta(\mathbb{R})$ mulţimea tuturor şirurilor de numere reale. Două şiruri $X = (x_n)_{n\geq 1}$, $Y = (y_n)_{n\geq 1} \in \delta(\mathbb{R})$ se zic adiacente dacă $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Apare prin urmare următoarea relaţie de adiacenţă, $\mathcal{R} \subset \delta(\mathbb{R}) \times \delta(\mathbb{R})$ unde $(X, Y) \in \mathcal{R}$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Relaţia $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă pe $\delta(\mathbb{R})$.

Întradevăr,

j) $X\mathcal{R}X$ dacă şi numai dacă $(X, X) \in \mathcal{R}$, $\forall X \in \delta(\mathbb{R})$ ceea ce este echivalent cu $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_n) = 0$. Deci $\mathcal{R}$ este reflexivă.

jj) $\mathcal{R}$ este tranzitivă adică $(X, Y), (Y, Z) \in \mathcal{R}$ implică $(X, Z) \in \mathcal{R}$. Într-adevăr, din

$$(X, Y), (Y, Z) \in \mathcal{R} \text{ avem } \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = \lim_{n\to\infty}((x_n - y_n) + (y_n - z_n)) = \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0,$$

de unde deducem că $(X, Z) \in \mathcal{R}$.

jjj) Relaţia $\mathcal{R}$ este simetrică adică din $(X, Y) \in \mathcal{R}$ rezultă $(Y, X) \in \mathcal{R}$. Într-adevăr, din

$$(X, Y) \in \mathcal{R} \text{ avem } \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, \text{ adică } \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = -\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0,$$

de unde rezultă $(Y, X) \in \mathcal{R}$.

Să mai observăm că dacă $(X, Y) \in \mathcal{R}$ şi $X = (x_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent atunci şirul $Y = (y_n)_{n\geq 1}$ este şi el convergent şi $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $(X, Y) \in \mathcal{R}$ atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ şi deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent rezultă că există $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x) = \lim_{n\to\infty}((y_n - x_n) + (x_n - x)) = \lim_{n\to\infty}(x_n - x) - \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0,$$

de unde deducem că $\lim_{n\to\infty} y_n = x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Deoarece $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă pe $\delta(\mathbb{R})$ rezultă că $\mathcal{R}$ împarte mulţimea şirurilor convergente din $\delta(\mathbb{R})$ în clase de echivalenţă. Dacă $(x_n)_{n\geq1}$ este un şir convergent din $\delta(\mathbb{R})$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ atunci vom nota cu $\hat{x}$ mulţimea tuturor şirurilor convergente din $\delta(\mathbb{R})$ care au limita $x \in \mathbb{R}$. Dacă $\hat{x}, x \in \mathbb{R}$ este o clasă de adiacenţă din $\delta(\mathbb{R})$ atunci orice şir $(x_n)_{n\geq1} \in \hat{x}$ se va numi un reprezentant al clasei $\hat{x}$.

Ca reprezentanţi ai clasei $\widehat{\ln 2}$ putem alege, de exemplu, şirurile $(v_n)_{n\geq1}$, $v_n = \ln 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, (reprezentatntul canonic al clasei $\widehat{\ln 2}$);
$(w_n)_{n\geq1}, w_n = \ln 2 - \frac{1}{4n+a}, a \in (1,2)$; $(t_n(b))_{n\geq1},\ t_n(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+b}$ unde $(a_n)_{n\geq1}$ este un şir de numere reale pozitive.

Pentru studiul echivalenţei şirurilor convergente (de fapt adiacenţa şirurilor Cauchy de numere reale) recomandăm excelenta monografie [7], Capitolul IV, intitulat *Numere reale*, pag. 68 - 112.

Să revenim la clasa $\widehat{\ln 2}$ notată, atunci când nu este pericol de confuzie, cu $\ln 2$.

Propoziţia 1. *Dacă $(a_n)_{n\geq1}$ este un şir mărginit de numere reale pozitive, atunci şirul $(z_n)_{n\geq1}$, $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+a_k}$ este din clasa $\widehat{\ln 2}$.*

Demonstraţie. Este evident că:

$$0 < x_n - z_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+a_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n+k)(n+k+a_k)} \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)(n+k+a_k)} \leq M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ unde } |a_n| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

După cum a demonstrat Leonhard Euler şirul $(s_n(2))_{n\geq 1}$, $s_n(2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(2) = s(2) = \frac{\pi^2}{6}$, (a se vedea [1]). Deoarece

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = s_{2n}(2) - s_n(2),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{rezultă că}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = s(2) - s(2) = 0.$$

Din faptul că $0 < x_n - z_n < M \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) \leq M \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0, \text{ de unde avem } \lim_{n\to\infty} (x_n - z_n) = 0,$$

$$\text{adică } \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2.$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Să mai observăm că, dacă $a_n = b \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ atunci $z_n = t_n(b)$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(b) = \lim\limits_{n\to=\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k+b} = \ln 2$. Deci $t_n(b) \in \widehat{\ln 2}$, $\forall b \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 1. *Fie* $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ *şi* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi strict descrescătoare pe* $\mathbb{R}_+$ *cu* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$*. Dacă* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, este o primitivă a funcţiei* f *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} (F(m\cdot n) - F(n)) = b \in \overline{\mathbb{R}}$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{(m-1)n} f(n+k) = b$.

Demonstraţie. Este evident că:

$$(5) \qquad F(m\cdot n) - F(n) = \sum_{k=1}^{(m-1)n} (F(n+k) - F(n+k-1)), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe fiecare interval $[n+k-1, n+k], n \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1,n}$, aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei F şi prin urmare, există $c_k \in (n+k-1, n+k)$, $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$F(n+k) - F(n+k-1) = f(c_k) = F'(c_k).$$

Prin urmare,

$$(6)\ F(mn)-F(n)=\sum_{k=1}^{(m-1)n}(F(n+k)-F(n+k-1))=\sum_{k=1}^{(n-1)n}f(c_k),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Deoarece funcţia f este strict descrescătoare, rezultă că:

$$(7)\qquad f(n+k)<f(c_k)<f(n+k-1),\forall n\in\mathbb{N}^*,k=\overline{1,n}.$$

Din relaţiile (6) şi (7) deducem că:

$$(8)\ \sum_{k=1}^{(m-1)n}f(n+k)<\sum_{k=1}^{(m-1)n}f(c_k)=F(m\cdot n)-F(n)<\sum_{k=1}^{(m-1)n}f(n\in k-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(m\cdot n)-F(n)+f(m\cdot n)-f(n)<\sum_{k=1}^{(m-1)n}f(n+k)<F(m\cdot n)-F(n),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă în (8) trecem la limită cu $n\to\infty$ şi ţinem seama că $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(m\cdot n)=0$, deducem că:

$$\lim_{n\to\infty}(F(m\cdot n)-F(n))\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{(m-1)n}f(n+k)\le\lim_{n\to\infty}(F(m\cdot n)-F(n)),$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(F(m\cdot n)-F(n))=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{(n-1)n}f(n+k)=b.$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Caz particular. Dacă $m=2$ din Teoremă deducem că:

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(n+k)=\lim_{n\to\infty}(F(2n)-F(n)).$$

Am obţinut astfel problema XII 87, propusă de Cristian Chiser în R.M.T., nr. 1/ 2001, pag. 40.

În acest caz pentru $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ rezultă că $F(x) = \ln x$ iar din (9) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln(2n) - \ln n) = \ln 2$.

Prezentăm în continuare şi alte proprietăţi ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \ln 2$.

Calculăm deci unele limite (folosite în [8]). Pentru calculul acestor limite utile şi interesante vom utiliza teorema Cesaro - Stolz $\left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right)$.

1) $a_1 = \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} =$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2(n+1)(2n+1)} = -\frac{1}{4}.$$

2) $a_2 = \lim\limits_{n\to\infty} n(n(x_n - x) - a_1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(x_n - x - \frac{a_1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x + \dfrac{1}{4n}}{\dfrac{1}{n^2}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n + \dfrac{1}{4(n+1)} - \dfrac{1}{4n}}{\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \dfrac{1}{4(n+1)} - \dfrac{1}{4n}}{-(2n+1)} \cdot (n(n+1))^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \right) n^3 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{16}.$$

3) $a_3 = \lim\limits_{n\to\infty} n(n(n(x_n - n) - a_1) - a_2) = \lim\limits_{n\to\infty} n^3 \left(x_n - x + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x + \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{16n^2}}{\dfrac{1}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n + \dfrac{1}{4(n+1)} - \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{16(n+1)^2} + \dfrac{1}{16n^2}}{\dfrac{1}{(n+1)^3} - \dfrac{1}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} - \dfrac{1}{4n(n+1)} + \dfrac{2n+1}{16n^2(n+1)^2}}{-(3n^2+3n+1)} \cdot (n(n+1))^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{4n^2+2n-1}{16n^2(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \right) \cdot n^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{48} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(4n^2+2n-1)(2n+1) - 8n^2(n+1)}{n^2(n+1)^2(2n+1)} \cdot n^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{96} \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+4n^2-2n+4n^2+2n-1-8n^3-8n^2}{n} = \frac{1}{96} \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0.$$

4)
$$a_4 = \lim_{n\to\infty} n(n(n(n(x_n-x)-a_1)-a_2)-a_3) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^4 \left(x_n - x + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x + \dfrac{1}{4n} - \dfrac{1}{16n^2}}{\dfrac{1}{n^4}} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)} - \frac{2n+1}{16n^2(n+1)^2} \right) \cdot n^5 \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2n+1}{4n(n+1)} \right) \cdot n^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+4n-4n^2-4n-1}{4n(n+1)(2n+1)} \cdot n^3 \right) = -\frac{1}{16\cdot 8} = -\frac{1}{128}.$$

5) $a_5 = \lim\limits_{n\to\infty} n(n(n(n(n(x_n-x)-a_1)-a_2)-a_3)-a_4) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n^5 \left(x_n - x - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} - \frac{a_3}{n^3} - \frac{a_4}{n^4} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^5 \left(x_n - x + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{128n^4} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x - \dfrac{a_1}{n} - \dfrac{a_2}{n^2} - \dfrac{a_3}{n^3} - \dfrac{a_4}{n^4}}{\dfrac{1}{n^5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{(n+1)^5} - \dfrac{1}{n^5}} \cdot \left[x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{16(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16n} + \frac{1}{128(n+1)^4} - \frac{1}{128n^4}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^5 - n^5} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16}\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{128}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^4(n+1)^4}\right](n(n+1))^5 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^5 - n^5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{4(n+1)(2n+1)n} - \frac{2n+1}{16n^2(n+1)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{128}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3(n+1)^4}\right) n^6\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{4(n+1)(2n+1)} - \frac{2n+1}{16n(n+1)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{128}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3(n+1)^4}\right) n^5\right) =$$

$$= \frac{1}{20} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{(n+1)(2n+1)} - \frac{2n+1}{4n(n+1)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{32}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3(n+1)^4}\right) n^5\right) =$$

$$= \frac{1}{20} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{32}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3(n+1)^4} - \frac{1}{4n(n+1)^2(2n+1)}\right) n^5\right) =$$

$$= \frac{1}{80} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{8}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^2(n+1)^2} - \frac{1}{2n+1}\right) n^2\right) =$$

$$= \frac{1}{80} \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^3+6n^2+4n+1)(2n+1) - 8n^2(n+1)^2}{8(n+1)^2 - (2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{80} \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+6n+1}{8(n+1)^2(2n+1)} = 0.$$

6) $a_6 = \lim\limits_{n\to\infty} n(n(n(n(n(n(x_n - x) - a_1) - a_2) - a_3) - a_4) - a_5) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n^6 \left(x_n - x - \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} - \frac{a_3}{n^3} - \frac{a_4}{n^4} - \frac{a_5}{n^5}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(x_n - x + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{128n^4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x + \frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{128n^4}}{\frac{1}{n^6}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{(n+1)^6} - \frac{1}{n^6}} \left[x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{16(n+1)^2} + \frac{1}{16n^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{128(n+1)^4} - \frac{1}{128n^4}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^6} - \frac{1}{(n+1)^6}} \left[x_n - x_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{128}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^6 - n^6} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{128}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{128n^4(n+1)^4}(n(n+1))^6\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(n+1)^6 - n^6} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)} - \frac{2n+1}{16n^2(n+1)^2} + \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{128n^4(n+1)^4}\right) n^7\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{32 \cdot n^3(n+1)^3} - \frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}\right) n^5\right) =$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 4} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{8n^2(n+1)^2} - \frac{1}{2n+1}\right) n^3\right) =$$

$$= \frac{1}{96} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+6n+1}{8n^2(n+1)^2(2n+1)} n^3\right) =$$

$$= \frac{1}{768} \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+6n+1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{3}{768}.$$

Deci relaţia (10) din [8] devine:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^4} + \frac{a_5}{n^5} + \frac{a_6}{n^6} + ... =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} - \frac{1}{128n^4} + \frac{3}{768n^6} - ...$$

References

[1] Acu D, *Asupra unei probleme date la bacalaureat*, G. M., nr. 11/ 2002, pag. 428 - 431.

[2] Bătineţu M.D., *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

[3] Boboc N., Colojoară I., *Elemente de analiză matematică*, Manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980.

[4] Dinculeanu N., Radu E., *Elemente de analiză matematică*, Manual pentru clasa a XI-a reală, Editura de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1960.

[5] Gussi Gh., Stănaşilă O., Stoica T., *Elemente de analiză matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[6] Năstăsescu C., Niţă C., Popa S., *Algebra*, manual pentru clasa a X-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[7] Nicolescu M., *Analiză Matematică, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[8] Vernescu A., *Asupra convergenţei unui şir cu limita* $\ln 2$, G.M. 10 - 11/ 1975, pag. 370 - 374.

Colegiul Naţional “Matei Basarab” - Bucureşti
Str. Matei Basarab, nr. 32, sector 3,
030674 - Bucureşti, Romania
e-mail: *cnmb@basarab.ro*

Academia Tehnică Militară - Bucureşti
Bd. George Coşbuc 81-83, Sect. 5
75275 - Bucureşti, România
e-mail: atm@mta.ro