Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 101–108

Inegalităţi simetrice între laturile unui triunghi, cu egalitate în triunghiuri neechilaterale

Dumitru Barac

Abstract

In this paper we present elementary proofs and extensions of the symmetric inequalities (1), (2) and (3) which hold in nonacute triangles.

2000 Mathematical Subject Classification: 51M04, 51M16

În această lucrare ne propunem să generalizăm inegalităţile (1), (2) şi (3) cuprinse în teorema 17.3.1 din [1] şi în problemele 4.2 şi 4.3 din [2] unde demonstraţiile folosesc condiţiile Kuhn-Tucker relative la probleme de optimizare cu restricţii. Demonstraţiile pe care le prezentăm sunt elementare.

Lema 1 *Funcţia* $f:(0,1]\to \mathbf{R}$, $f(t)=\dfrac{1+2t^2}{2t+t^2}$ *este strict descrescătoare.*

Demonstraţie. Derivata funcţiei f,

$$f'(t) = \frac{2(2t+1)(t-1)}{(2t+t^2)^2},$$

este negativă pe $(0,1)$, deci funcţia f este strict descrescătoare.

Se poate da şi o demonstraţie fără utilizarea noţiunii de derivată. Fie $t_1, t_2 \in (0,1]$, $t_1 < t_2$. Un calcul elementar conduce la

$$f(t_2) - f(t_1) = \frac{(t_2-t_1)(4t_1t_2 - t_1 - t_2 - 2)}{(2t_1+t_1^2)(2t_2+t_2^2)}.$$

Ţinând seamă că

$$4t_1t_2 - t_1 - t_2 - 2 \le 2(t_1^2+t_2^2) - t_1 - t_2 - 2 =$$

$$= (t_1-1)(2t_1+1) + (t_2-1)(2t_2+1) < 0,$$

rezultă $f(t_2) - f(t_1) < 0$, adică funcţia f este strict descrescătoare.

Lema 2 *Dacă $u \ge 0, v \ge 0, \alpha \in (-1,1)$ şi $u^2+v^2-2\alpha uv \le 1$, atunci are loc inegalitatea*

$$\frac{u+v}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}};$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă $u = v = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$.

Demonstraţie. Ţinând seamă de inegalitea $\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 \ge uv$, cu egalitate dacă şi numai dacă $u = v$, putem scrie

$$1 \ge u^2+v^2-2\alpha uv = (u+v)^2 - 2(1+\alpha)uv \ge$$
$$\ge (u+v)^2 - 2(1+\alpha)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 2(1-\alpha)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2,$$

de unde rezultă concluzia din enunţ.

Lema 3 *Dacă $u \ge 0, v \ge 0, u+v > 0, \alpha \in \left(-1, \dfrac{1}{2}\right]$ şi $u^2+v^2-2\alpha uv \le 1$, atunci are loc inegalitatea*

$$\frac{1+u^2+v^2}{u+v+uv} \geq \frac{2(2-\alpha)[2\sqrt{2(1-\alpha)}-1]}{7-8\alpha};$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă $u = v = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$.

Demonstraţie. În baza inegalităţilor $\dfrac{u^2+v^2}{2} \geq \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 \geq uv$, cu egalitate dacă şi numai dacă $u = v$, avem

$$\frac{1+u^2+v^2}{u+v+uv} \geq \frac{1+2\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2}{u+v+\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2} = f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Aplicând lema 2 avem

$$\frac{u+v}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2(1-1/2)}} = 1.$$

Pe baza lemei 1, avem

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}\right) = \frac{2(2-\alpha)[2\sqrt{2(1-\alpha)}-1]}{7-8\alpha}.$$

Urmărind raţionamentul anterior, se constată că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $u = v = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}$.

Teorema 1 *Fie* $\alpha \in \left(-1, \dfrac{1}{2}\right]$. *Dacă* a, b, c *sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu* $\arccos\alpha$, *atunci are loc inegalitatea*

$$ab+bc+ca \leq \frac{2(2-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)}+7\alpha-5}{2(1+\alpha)^2}(a+b+c)^2;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $\arccos\alpha$.

Demonstraţie. Putem presupune $m(\hat{A}) \geq \arccos\alpha$; folosind teorema cosinusului, obţinem $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leq \alpha$. Notând $\dfrac{b}{a} = u, \dfrac{c}{a} = v$, rezultă $u^2+v^2-2\alpha uv \leq 1$, iar inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{u+v+uv}{(1+u+v)^2} \leq \frac{2(2-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)}+7\alpha-5}{2(1+\alpha)^2}.$$

Folosind lema 3, putem scrie

$$\frac{u+v+uv}{(1+u+v)^2} = \frac{1}{2+\dfrac{1+u^2+v^2}{u+v+uv}} \leq \frac{1}{2+\dfrac{2(2-\alpha)[2\sqrt{2(1-\alpha)}-1]}{7-8\alpha}} =$$

$$= \frac{7-8\alpha}{4(2-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)}+10-14\alpha} = \frac{2(2-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)}+7\alpha-5}{2(1+\alpha)^2}.$$

Observaţia 1 Pentru $\alpha = 0$ se obţine teorema 17.3.1 din [1], adică faptul că în orice triunghi neascuţitunghic are loc inegalitatea

$$ab+bc+ca \leq \frac{4\sqrt{2}-5}{2}(a+b+c)^2, \tag{1}$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

Observaţia 2 Deoarece în orice triunghi există un unghi cu măsura cel puţin $\pi/3$, obţinem faptul binecunoscut că în orice triunghi este adevărată inegalitatea

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2,$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului echilateral.

Consecinţa 1 *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu $2\pi/3$, atunci are loc inegalitatea*

$$ab+bc+ca \leq (10\sqrt{3}-17)(a+b+c)^2;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $2\pi/3$.

Teorema 2 *Fie $\alpha \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu $\arccos\alpha$, atunci are loc inegalitatea*

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq \frac{5\sqrt{1-\alpha}+(3-2\alpha)\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}abc;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $\arccos\alpha$.

Demonstraţie. Este suficient să dovedim că dacă $u > 0$, $v > 0$ şi $u^2 + v^2 - 2\alpha uv \leq 1$, atunci are loc inegalitatea

$$(1 + u + v)(u + v + uv) \geq \left(5 + \frac{2(3 - 2\alpha)}{\sqrt{2(1 - \alpha)}}\right) uv.$$

Ţinem seamă de inegalităţile $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ şi de faptul că funcţia $g : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $g(t) = t + \frac{1}{t}$ este strict descrescătoare. Avem

$$\frac{(1 + u + v)(u + v + uv)}{uv} = 3 + \frac{u+v}{uv} + \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) + (u + v) \geq$$
$$\geq 3 + \frac{u+v}{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2} + 2 + (u + v) = 5 + 2g\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq$$
$$\geq 5 + 2g\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}\right) = 5 + \frac{2(3 - 2\alpha)}{\sqrt{2(1 - \alpha)}}.$$

Observaţia 3 Pentru $\alpha = 0$ se obţine problema 4.2 din [2], adică faptul că în orice triunghi neascuţitunghic are loc inegalitatea

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq (5 + 3\sqrt{2})abc, \tag{2}$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

Observaţia 4 Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ obţinem faptul binecunoscut că în orice triunghi este adevărată inegalitatea

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc,$$

egalitatea fiind adevărată numai în cazul triunghiului echilateral.

Consecinţa 2 *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu $2\pi/3$, atunci are loc inegalitatea*

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq \left(5+\frac{8}{\sqrt{3}}\right) abc;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $2\pi/3$.

Teorema 3 *Fie $\alpha \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu $\arccos\alpha$, atunci are loc inegalitatea*

$$(a+b+c)^3 \geq \left(2(7-\alpha)+\frac{4(5-3\alpha)}{\sqrt{2(1-\alpha)}}\right) abc;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $\arccos\alpha$.

Demonstraţie. Din teorema 1 avem

$$(a+b+c)^2 \geq \frac{4(2-\alpha)\sqrt{2(1-\alpha)}+10-14\alpha}{7-8\alpha}(ab+bc+ca),$$

iar din teorema 2 avem

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq \frac{5\sqrt{2(1-\alpha)}+6-4\alpha}{\sqrt{2(1-\alpha)}} abc.$$

Prin înmulţirea celor două inegalităţi se obţine inegalitatea dorită.

Se poate da şi o demonstraţie directă. Este suficient să dovedim că dacă $u > 0$, $v > 0$ şi $u^2+v^2-2\alpha uv \leq 1$, atunci

$$\frac{(1+u+v)^3}{uv} \geq 14-2\alpha+\frac{4(5-3\alpha)}{\sqrt{2(1-\alpha)}}.$$

Funcţia $h : (0,1] \to \mathbf{R}$, $h(t) = \dfrac{(1+2t)^3}{t^2}$ este strict descrescătoare, deoarece $h'(t) = \dfrac{(1+2t)^2(t-1)}{t^4} < 0$ pentru $t \in (0,1)$. Ţinând seamă de acest fapt şi de inegalitatea $uv \le \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2$, avem

$$\begin{aligned}\frac{(1+u+v)^3}{uv} &\ge \frac{(1+u+v)^3}{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2} = h\left(\frac{u+v}{2}\right) \ge \\ &\ge h\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}}\right) = 14 - 2\alpha + \frac{4(5-3\alpha)}{\sqrt{2(1-\alpha)}}.\end{aligned}$$

Observaţia 5 Pentru $\alpha = 0$ se obţine problema 4.3 din [2], adică faptul că în orice triunghi neascuţitunghic are loc inegalitatea

$$(a+b+c)^3 \ge (14 + 10\sqrt{2})abc, \tag{3}$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

Observaţia 6 Pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$ obţinem faptul binecunoscut că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$(a+b+c)^3 \ge 27abc,$$

egalitatea având loc numai în cazul triunghiului echilateral.

Consecinţa 3 *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi în care un unghi are mărimea cel puţin egală cu $2\pi/3$, atunci are loc inegalitatea*

$$(a+b+c)^3 \ge \left(15 + \frac{26}{\sqrt{3}}\right) abc;$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel şi măsura unghiului de la vârf este $2\pi/3$.

Bibliografie

[1] W. W. Breckner, *Cercetare operaţională*, Cluj-Napoca, Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică, 1981;

[2] W. W. Breckner şi D. Duca, *Culegere de probleme de cercetare operaţională*, Cluj-Napoca, Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică 1983.

Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu
Departamentul de Matematică
Str. Dr. I. Raţiu, nr. 5–7
550012 Sibiu, România