Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 109–112

Asupra unei probleme de aritmetică

Ana Maria Acu, Mugur Acu

Abstract

In this paper we solve a problem proposed by captain Gh. Nicolescu in the well known journal "Gazeta Matematică".

2000 Mathematical Subject Classification: 11A99

1 Introducere

În [1], la pagina 32, căpitan Gheorghe Nicolescu propune spre rezolvare următoarea problemă (P4303):

Să se cerceteze dacă există numere de trei cifre şi de patru cifre care satisfac egalităţile:

$$\overline{abc} = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$$

$$\overline{abcd} = 3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) + 2\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)$$

În primul rând apare întrebarea de ce a ales autorul numai numere de trei şi patru cifre?

Să formulăm o problemă mai generală: considerăm numerele de n cifre, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ care verifică relaţia

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} = 3\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^3.$$

Să determinăm acei n pentru care problema are soluţii.

Se observă cu uşurinţă că numerele de n cifre care verifică relaţia de mai sus, trebuie să verifice inegalitatea:

$$10^{n-1} \leq \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq 3 \cdot 9^2 \cdot n + 2 \cdot 9^3 \cdot n = 1701 \cdot n$$

Evident problema considerată nu are soluţii dacă $10^{n-1} > 1701 \cdot n$. Mai observăm că pentru $n = 5$ avem $10000 > 8505$. Vom demonstra prin inducţie că pentru $n \geq 5$ are loc inegalitatea $10^{n-1} > 1701 \cdot n$. Presupunem că $10^{n-1} > 1701 \cdot n$ şi vrem să arătăm că $10^n > 1701 \cdot (n+1)$.

Avem $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 10 \cdot 1701 \cdot n$, dar din $10 \cdot n > n + 1$ (relaţie evidentă pentru $n \geq 5$) deducem imediat $10 \cdot 1701 \cdot n > 1701(n+1)$ şi astfel demonstraţia este încheiată.

Deci, pentru $n \geq 5$ problema considerată nu are soluţii.

Pentru $n = 1$ este evident că avem numai soluţia banală $a_1 = 0$.

Pentru $n = 2$ relaţia din problemă se scrie

$$\overline{a_1 a_2} = 3\left({a_1}^2 + {a_2}^2\right) + 2\left({a_1}^3 + {a_2}^3\right)$$

unde $1 \leq a_1 \leq 3$ deoarece pentru $a_1 \geq 4$ avem $2 \cdot {a_1}^3 > 100$.

Pentru $a_1 = 1$ avem $\overline{1a_2} = 5 + 3{a_2}^2 + 2{a_2}^3$. Deoarece pentru $a_2 > 2$ avem $2{a_2}^3 > 20$ deducem $a_2 \leq 2$. Observăm că pentru $a_2 = 0$, $a_2 = 1$, respectiv $a_2 = 2$ condiţia din enunţ nu este verificată.

Pentru $a_1 = 2$ obţinem $\overline{2a_2} = 28 + 3{a_2}^2 + 2{a_2}^3$. Din membrul stâng deducem că a_2 nu ar putea lua decât valoarea 9. Dar se observă că nici în acest caz condiţia din enunţ nu este verificată.

Analog se arată că nici în cazul $a_1 = 3$ nu putem găsi soluţii ale problemei propuse.

Rămân deci cazurile numerelor de trei şi respectiv de patru cifre propuse în Gazeta Matematică.

2 Rezultatele principale

Pentru $n = 3$ avem $\overline{abc} = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^3 + b^3 + c^3)$ şi observăm că $100 \leq \overline{abc} \leq 999$ iar $3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^3 > 999$. Deducem $a \leq 7$, $b \leq 7$, $c \leq 7$.

În continuare vom aborda problema pe cazuri.

Caz I. Pentru $a = b = c$ obţinem $111a = 9a^2 + 6a^3$, adică $3 \cdot 37 = 3a(3 + 2a)$. Observăm că $a = 1$ (singura soluţie posibilă) nu verifică această condiţie.

Caz II. Pentru $a = 1$ obţinem $\overline{1bc} = 5 + 3\left(b^2 + c^2\right) + 2\left(b^3 + c^3\right)$, adică $\overline{bc} + 95 = 3\left(b^2 + c^2\right) + 2\left(b^3 + c^3\right)$. Dar in condiţiile $a \leq 7$, $b \leq 7$, $c \leq 7$ avem $\overline{bc} + 95 \leq 77 + 95 = 172$. Din $3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 > 172$ deducem $0 \leq b \leq 3$ şi $0 \leq c \leq 3$. Pentru $b = 0$ obţinem $c\left(2c^2 + 3c - 1\right) = 95 = 5 \cdot 19$, deci $c = 1$. Dar pentru $c = 1$ relaţia anterioară nu este verificată. Analog se arată că nici pentru $b = 1$, $b = 2$ şi $b = 3$ nu se găsesc soluţii.

Caz III. Pentru $a = 2$ avem $172 + \overline{bc} = 3\left(b^2 + c^2\right) + 2\left(b^3 + c^3\right)$. Dar in condiţiile $a \leq 7$, $b \leq 7$, $c \leq 7$ avem $\overline{bc} + 172 \leq 77 + 172 = 249$. Din $3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 > 249$ deducem $0 \leq b \leq 4$ şi $0 \leq c \leq 4$. Pentru $b = 0$ obţinem $c\left(2c^2 + 3c - 1\right) = 172 = 4 \cdot 43$, deci $c \in \{1, 2, 4\}$. Se observă uşor că $c = 1$ şi $c = 2$ nu verifică condiţia cerută.

Pentru $c = 4$ se observă imediat că condiţia dată este verificată şi astfel obţinem soluţia $\overline{abc} = 204$

Într-o manieră similară cu cea utilizată la cazul precedent se arată că pentru $b = 1, 2, 3, 4$ nu se găsesc alte soluţii.

Caz IV. Pentru $a = 3$ avem $219 + \overline{bc} = 3\left(b^2 + c^2\right) + 2\left(b^3 + c^3\right)$. Dar in condiţiile $a \leq 7$, $b \leq 7$, $c \leq 7$ avem $\overline{bc} + 219 \leq 77 + 219 = 296$. Din $3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 > 296$ deducem $0 \leq b \leq 4$ şi $0 \leq c \leq 4$. În mod analog cu cazurile precedente se verifică toate posibilitaţile dar nu se găsesc alte soluţii.

Pentru restul cazurilor $a = 4$, $a = 5$, respectiv $a = 6$ se va proceda în acelaşi mod fără însă a găsi alte soluţii.

Deci unicul număr de trei cifre care verifică egalitatea din enunţ este 204.

Pentru $n = 4$ avem $\overline{abcd} = 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 2(a^3+b^3+c^3+d^3)$. Observăm că

$$3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) + 2\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \leq 3 \cdot 4 \cdot 9^2 + 2 \cdot 4 \cdot 9^3 = 6804$$

şi atunci $\overline{abcd} \leq 6804$. Deci $a \leq 6$.

Notăm $E = a\left(1000 - 3a - 2a^2\right)$ şi

$$F = b\left(100 - 3b - 2b^2\right) + c\left(10 - 3c - 2c^2\right) + d\left(1 - 3d - 2d^2\right)$$

şi atunci egalitatea din enunţ devine $E + F = 0$.

Pentru $a = 6$ avem $E = 5460$ şi din $\overline{abcd} \leq 6804$ deducem $b \leq 8$. Dar în aceste condiţii valoarea cea mai mică pentru F se obţine pentru $b = 8$, $c = d = 9$ şi anume -3719. Deci $E + F > 0$ ceea ce ne arată că nu avem soluţii în acest caz.

Pentru $a = 5$ vom avea în mod analog $E = 4675$ iar valoarea minimă pentru F va fi -4104, adică din nou nu avem soluţii.

În aceeaşi manieră se studiază şi cazurile $a = 4$, $a = 3$ şi $a = 2$ care nu conduc la nici o soluţie.

Pentru $a = 1$ avem $E = 995$ şi se procedează similar cu cazul $a = 6$ ajungându-se la soluţia $b = d = 3$ şi $c = 8$, adică $\overline{abcd} = 1383$.

Deci unicul număr de patru cifre care verifică egalitatea din enunţ este 1383.

References

[1] Gazeta Matematică - *Supliment cu enunţurile problemelor nerezolvate propuse în anii* 1-44 , 32.

Department of Mathematics
University "Lucian Blaga" of Sibiu,
Str. Dr. I. Ratiu Nr.7,
550012 Sibiu, Romania
E-mail address: *acu_mugur@yahoo.com*