Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2005), 89–94

Generalizări ale unor probleme din Gazeta Matematică

Ana Maria Acu

Abstract

In this paper we generalize ten problems proposed in Gazeta Matematică.

2000 Mathematical Subject Classification: 11A99

1 Introducere

George Polya ([1]) spune: "*A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul distinctiv al speciei umane...*".

Aşadar, fiecare problemă, nu numai de matematică, ascunde anumite substraturi independente de noi. Dacă acestea sunt descoperite, atunci putem să obţinem noi probleme care generalizează problema respectivă, punându-se în evidenţă aspecte şi informaţii noi.

Descoperirea substraturilor unei probleme şi demonstrarea lor constituie o activitate de cercetare, care uneori poate duce la rezultate surprinzătoare, chiar dacă ea se referă la rezultate din matematicile elementare.

Plecând de la cele afirmate mai sus în nota de faţă ne propunem să prezentăm zece generalizări ale unor probleme din Gazeta Matematică, lăsându-i cititorului satisfacţia descoperirii substraturilor care au stat la baza obţinerii acestor generalizări.

Problema 1. *Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ fracţia $\frac{an+1}{an^2+n+1}$ este ireductibilă.*

Soluţie. Fie $d = (an+1, an^2+n+1)$. Deoarece $d/(an+1)$, rezultă că $d/n(an+1)$. Apoi $d/(an^2+n+1)-(an^2+n)$, adică $d/1$. Deci, avem $d=1$, ceea ce înseamnă că fracţia este ireductibilă.

Observaţia 1. Pentru $a = 1999$ obţinem problema $E : 11724$, G.M. nr.3/1999, propusă de Gh. Achim.

Problema 2. *Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul*

$$t_n = \frac{(a+2)^{2n} + 2(a+2)^{n+1} + a(a+4)}{(a+1)(a+2)^n + (a+1)(a+4)}$$

este natural.

Soluţie. Avem succesiv

$$t_n = \frac{(a+2)^{2n} + (a+4)(a+2)^n + a(a+2)^n + a(a+4)}{(a+1)\left((a+2)^n + (a+4)\right)} =$$

$$= \frac{(a+2)^n\left((a+2)^n + a + 4\right) + a((a+2)^n + a + 4)}{(a+1)((a+2)^n + a + 4)} = \frac{(a+2)^n + a}{a+1} =$$

$$= \frac{((a+1)+1)^n + a}{a+1} = \frac{t\cdot(a+1) + 1 + a}{a+1} = t+1 \in \mathbb{N},$$

deoarece $t \in \mathbb{N}$.

Observaţia 2. Pentru $a = 5$ obţinem problema $E : 11746$, G.M. nr.4/1999, propusă de Gh. Achim.

Problema 3. *Fie p un număr prim impar şi $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(p-1)^n + n^{p-1}$ se divide cu p, atunci n este impar.*

Soluţie. Vom arăta, mai întâi, că dacă n este par atunci

$$x_{n,p} = (p-1)^n + n^{p-1}$$

nu se divide cu p. Distingem două cazuri:

1) Dacă p/n, atunci p/n^{p-1}. Dacă $p/x_{n,p}$, atunci rezultă $p/(p-1)^n$, ceea ce nu este posibil.

2) Dacă $p \not| n$, atunci $p/n^{p-1}-1$. Dacă $p/x_{n,p}$, atunci

$$p/x_{n,p} - (n^{p-1}-1) = (p-1)^n + 1 = \mathcal{M}_p + 2,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

Rămâne că n trebuie să fie impar.

Observaţia 3. Pentru $p = 11$ se obţine problema E:24644, G.M. nr.2/2002, propusă de Aurel Ene.

Problema 4. *Dacă a, b, p sunt numere naturale, $p \geq 1$, atunci să se arate că numărul $n = p^{2a} + p^{2b} + p^a + p^b + 2p^{a+b}$ nu poate fi pătrat perfect.*

Soluţie. Avem $n = (p^a + p^b)(p^a + p^b + 1)$. Notăm $p^a + p^b$ cu k şi avem $k^2 < k(k+1) = n < (k+1)^2$, ceea ce ne arată că n nu poate fi pătrat perfect deoarece este încadrat strict între două pătrate perfecte.

Observaţia 4. Pentru $p = 2$ obţinem problema E:11695, G.M. nr.1/1999, propusă de Cătălin Cristea.

Problema 5. *Fie p_1 şi p_2 două numere prime distincte. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere întregi aşa încât $p_1x - p_2y + p_1(p_2-1)z = 0$, atunci numărul $y(x-z)$ este divizibil cu p_1p_2.*

Soluţie. Avem $p_1(x + (p_2-1)z) = p_2y$, de unde p_1/y şi $p_2/(x + (p_2-1)z)$. Dar p_2/p_2z, deci $p_2/(x + (p_2-1)z) - p_2z$, de unde $p_2/(x-z)$. Utilizând p_1/y, $p_2/x-z$ şi $(p_1, p_2) = 1$, deducem că $p_1p_2/y(x-z)$.

Observaţia 5. Pentru $p_1 = 3$ şi $p_2 = 7$ obţinem problema E:11649, G.M. nr.11/1998, propusă de Ofelia Sandu.

Problema 6. *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că numerele $x_{n,k} = \dfrac{2k+1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $k \in \mathbb{N}$, nu pot fi fracţii zecimale periodic simple.*

Soluţie. Avem $x_{n,k} = \dfrac{2kn+2k+1}{n(n+1)}$

Numitorul este un produs de două numere naturale consecutive, deci are ca factor pe 2. Cum numărătorul numerelor $x_{n,k}$ este impar, rezultă că numitorul conţine pe 2 în descompunerea sa în factori primi. Deducem că fracţiile $x_{n,k}$ pot fi sau zecimale finite sau periodic mixte.

Observaţia 6. Pentru $k = 0$ obţinem problema E:11694, G.M. nr.1/1999, propusă de Ion Marcel Neferu.

Problema 7. *Fie* $x_i, i = \overline{1, n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ *şi a număr real aşa încât* $\sum\limits_{i=1}^{n^2} x_i = na$. *Demonstraţi că* $\sum\limits_{i=1}^{n^2} x_i^2 \geq a^2$. *Precizaţi când are loc egalitatea.*

Soluţie. Avem succesiv

$$\sum_{i=1}^{n^2} x_i^2 - a^2 = \sum_{i=1}^{n^2} x_i^2 - 2n\frac{a^2}{n} + a^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n^2} x_i^2 - 2\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n^2} x_i + \sum_{i=1}^{n^2} \frac{a^2}{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} \left(x_i - \frac{a}{n}\right)^2 \geq 0,$$

inegalitate evidentă. Egalitatea se obţine pentru $x_1 = x_2 = ... = x_{n^2} = \frac{a}{n}$.

Observaţia 7. Pentru $n = 2$ şi $a = 3$ obţinem problema propusă de Ion Safta la Concursul rezolvitorilor din G.M. nr.10/1999.

Problema 8. *Dacă* $x_1, x_2, ..., x_n$ *sunt numere reale nenegative,* $n \geq 2$, *atunci să se arate că*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n \geq \frac{4}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{x_i x_j}.$$

Precizaţi când are loc egalitatea.

Soluţie. Folosind inegalităţile $x^2 + y^2 \geq 2xy$ şi $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, adevărate oricare ar fi $x, y \in [0, \infty)$ şi cu egalitate dacă $x = y$, avem

$$x_i^2 + x_j^2 + 2 \geq 2x_i x_j + 2 = 2(x_i x_j + 1) \geq 4\sqrt{x_i x_j}$$

cu egalitate pentru $x_i = x_j = 1$.

Însumând inegalităţiile $x_i^2 + x_j^2 + 2 \geq 4\sqrt{x_i x_j}$ pentru $1 \leq i < j \leq n$, obţinem

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\frac{n(n-1)}{2} \geq 4 \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j}$$

de unde rezultă inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n \geq \frac{4}{n-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j},$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Observaţia 8. Pentru $n = 3$ obţinem problema E:11673, G.M. nr.12/1998, propusă de Dinicu Budescu.

Problema 9. *Fie* $x \in (0, \infty)$ *şi* $a_i \in [0, x]$, $i = \overline{1, n}$. *Să se arate că*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{x^2 - a_i a_{i+1}} \leq 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^2 - a_i^2}$$

unde $a_{n+1} = a_1$.

Soluţie. Avem

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{x^2 - a_i a_{i+1}} - \frac{a_i}{x^2 - a_i^2} - \frac{a_{i+1}}{x^2 - a_{i+1}^2} = -\frac{(a_i + a_{i+1})x^2(a_i - a_{i+1})^2}{(x^2 - a_i a_{i+1})(x^2 - a_i^2)(x^2 - a_{i+1}^2)} \leq 0,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Însumând aceste inegalităţi, obţinem inegalitatea din enunţ.

Observaţia 9. Pentru n=3 obţinem problema propusă de Marcel Chiriţă la Concursul rezolvitorilor din G.M. nr.10/1999.

Problema 10. *Să se determine ultimele patru cifre ale numărului* 1999^n, $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Trebuie găsit restul împărţirii numărului 1999^n la 10^4. Avem $1999 \equiv 1999(mod\ 10^4)$, $1999^2 \equiv 6001(mod\ 10^4)$, $1999^3 \equiv 5999(mod\ 10^4)$, $1999^4 \equiv 2001(mod\ 10^4)$, $1999^5 \equiv 9999(mod\ 10^4)$, $1999^6 \equiv 8001(mod\ 10^4)$, $1999^7 \equiv 3999(mod\ 10^4)$, $1999^8 \equiv 4001(mod\ 10^4)$, $1999^9 \equiv 7999(mod\ 10^4)$, $1999^{10} \equiv 0001(mod\ 10^4)$.

Rezultă că dacă $n = 10k + r, r = \overline{0,9}, k \in \mathbb{N}$ atunci $1999^n \equiv 1999^r$ $(mod\ 10^4)$.

Deci $1999^{10k}, k \in \mathbb{N}$, are ultimele patru cifre 0001; $1999^{10k+1}, k \in \mathbb{N}$, are ultimele patru cifre 1999; $1999^{10k+2}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 6001; $1999^{10k+3}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 5999; $1999^{10k+4}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 2001; $1999^{10k+5}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 9999; $1999^{10k+6}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 8001; $1999^{10k+7}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 3999; $1999^{10k+8}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 4001; $1999^{10k+9}, k \in \mathbb{N}$ are ultimele patru cifre 7999.

Observaţia 10. Pentru $n = 1998$ se obţine problema E:11647, G.M. nr.11/1998, propusă de Ioan Ghiţă şi Romanţa Ghiţă.

Observaţia 11. Ultimele trei cifre ale numărului 1999^n, $n \in \mathbb{N}$ sunt 001 pentru n număr par şi 999 pentru n număr impar.

References

[1] G. Polya, *Descoperirea în matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.

[2] Gazeta Matematică, 11, 12 - 1998; 1, 3, 4, 10 - 1999; 2 - 2002.

Department of Mathematics
University "Lucian Blaga" of Sibiu,
Str. Dr. I. Ratiu Nr.7,
550012 Sibiu, Romania
E-mail address: *depmath@ulbsibiu.ro*